方べきの定理とその逆

定義. 円と点に対して決まる次の値のことを**方べき（の値）**という.

$$(\text{点と円の中心の距離})^2 - (\text{円の半径})^2$$

方べきの定理1

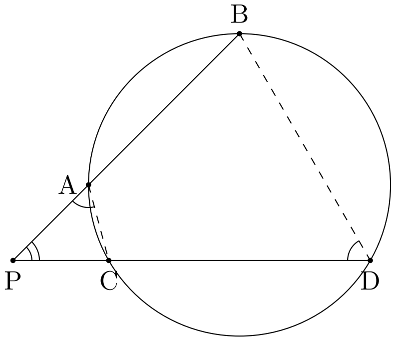
点Pを通る2直線が，円とそれぞれ2点A，Bと2点C，Dで交わっている時，

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$$

が成り立つ.

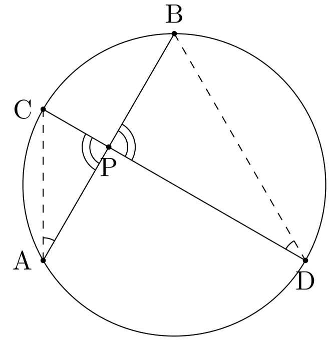
証明. 点Pが，円の外部にある場合と内部にある場合に分けて証明する.

(i) 点Pが，円の外部にある場合



$\triangle$PACと$\triangle$PDBにおいて，円に内接する四角形の性質より，$\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{PDB}$が成り立つ．また$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{DPB}$が成り立つ(共通).
よって，$\triangle$PACと$\triangle$PDBは相似である.
$\mathrm{PA}:\mathrm{PC}=\mathrm{PD}:\mathrm{PB}$から，主張が従う.

(ii) 点Pが，円の内部にある場合



$\triangle$PACと$\triangle$PDBにおいて，円周角の定理より，$\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{PDB}$が成り立つ．また$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{DPB}$が成り立つ（対頂角）．よって，$\triangle$PACと$\triangle$PDBは相似である.
$\mathrm{PA}:\mathrm{PC}=\mathrm{PD}:\mathrm{PB}$から，主張が従う.

□

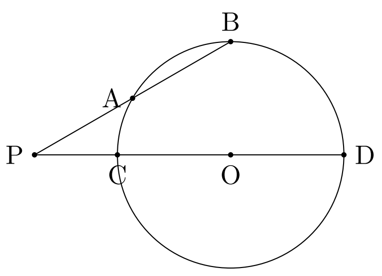
定理. 上の方べきの定理1において，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$ の値は，

(i) 点Pが円の外部にある場合は，方べきの値に等しく，

(ii) 点Pが円の内部にある場合は，方べきの値の -1 倍に等しい.

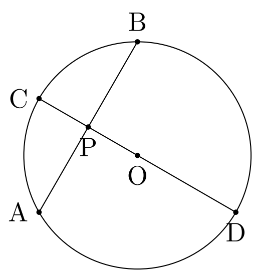
証明. 一方の直線が，円の中心Oを通っている場合を考える．円の半径を r とする.

(i) 点Pが，円の外部にある場合



$$\begin{aligned}\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} &= \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}\\ &= (\mathrm{PO}-r)(\mathrm{PO}+r)\\ &= \mathrm{PO}^2-r^2\end{aligned}$$

(ii) 点Pが，円の内部にある場合



$$\begin{aligned}\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} &= \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}\\ &= (r-\mathrm{PO})(r+\mathrm{PO})\\ &= r^2-\mathrm{PO}^2\end{aligned}$$

が成り立つ．方べきの値は，PO^2-r^2 だったので主張が従う.

□

方べきの定理 2

円の外にある点 P を通る 2 直線の一方が，円と 2 点 A，B で交わり，もう一方が点 T で接している時，

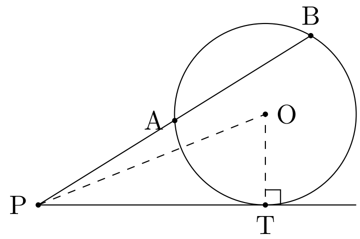
$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$$

が成り立つ．（上の値は，方べきの値に等しい）

証明. 円の半径を r とする．
上の 2 つの定理から，PT^2 が方べきの値に等しいことを示せば良い．△POT は，直角三角形なので，三平方の定理から，

$$\mathrm{PO}^2=\mathrm{PT}^2+\mathrm{OT}^2=\mathrm{PT}^2+r^2$$

が成り立つ．よって，$\mathrm{PT}^2=\mathrm{PO}^2-r^2$ となり，これは方べきの値である．



□

注意. 方べきの定理 2 は，（方べきの定理 1 と同様に）三角形の相似を用いて証明することもできる：△PAT と △PTB において，∠APT = ∠TPB（共通）は明らかであり，接弦定理から，∠PTA = ∠PBT が成り立つ．よって，△PAT と △PTB が相似であることが従う．

方べきの定理の逆

- 2 つの線分 AB，CD，またはそれらの延長線どうしが点 P で交わり，

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$$

が成り立つなら，4 点 A, B, C, D は，同一円周上にある．

- 円の弦 AB の延長線上の点 P とその円周上の点 T に対して，

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$$

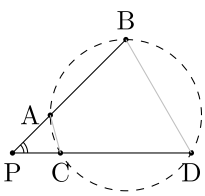
が成り立つなら，PT はこの円に接する．

証明. • △PAC と △PDB において，
∠APC = ∠DPB〔(i):共通角，(ii):対頂角〕が成り立ち，
定理の仮定から PA · PB = PC · PD が成り立つので

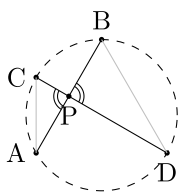
$$\mathrm{PA}:\mathrm{PC}=\mathrm{PD}:\mathrm{PB}$$

が成り立つ．よって，△PAC と △PDB は相似である（二辺比夾角相等）．対応する角は等しいので，∠PAC = ∠PDB が成り立つ．よって，〔(i):円に内接する四角形の定理の逆，(ii):円周角の定理の逆〕より，主張が従う．

(i) 点 P が円の外部



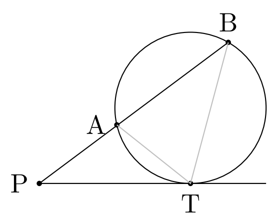
(ii) 点 P が円の内部



• △PAT と △PTB において，∠APT = ∠TPB（共通）が成り立ち，
定理の仮定から PA · PB = PT · PT が成り立つので

$$\mathrm{PA}:\mathrm{PT}=\mathrm{PT}:\mathrm{PB}$$

が成り立つ．よって，△PAT と △PTB は相似である（二辺比夾角相等）．対応する角は等しいので，∠PTA = ∠PBT が成り立つ．よって，接弦定理の逆より，主張が従う．



□