共役複素数の n 乗は n 乗の共役複素数

複素数 c に対して，その共役複素数を $\overline{c}$ で表す．すなわち，a, b を実数，i を虚数単位とするとき，$c = a + bi$ なら，$\overline{c} = a - bi$ である．共役複素数の重要な性質として次が知られている．

命題. c を複素数，n を正の整数とする．このとき次が成り立つ．

$$(\overline{c})^n = \overline{c^n}$$

証明. a, b を実数とし，$c = a + bi$ とすると，$\overline{c} = a - bi$ である．$(\overline{c})^n$ が，c^n の共役複素数である事を示せば良い．$(\overline{c})^n$ は，二項定理を用いて

$$\begin{aligned}(\overline{c})^n = (a - bi)^n &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}(-bi)^r \\ &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r (-i)^r \qquad (1)\end{aligned}$$

と計算できる．同様にして，

$$\begin{aligned}c^n = (a + bi)^n &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}(bi)^r \\ &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r i^r \qquad (2)\end{aligned}$$

である．ここで，(1) 式と，(2) 式を比較すると，各項の係数の ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$ の部分は同じなので，それ以外の部分，すなわち，$(-i)^r$ と i^r を比較すれば良い．[1]

- r が偶数の項については，$r = 2k$ とおくと，

$$\begin{array}{ccccccc}(-i)^r &=& (-i)^{2k} &=& \{(-i)^2\}^k &=& (-1)^k \\ i^r &=& i^{2k} &=& \{i^2\}^k &=& (-1)^k\end{array}$$

  となり，どちらも同じ実数である．

- r が奇数の項については，$r = 2k + 1$ とおくと，

$$\begin{array}{ccccccc}(-i)^r &=& (-i)^{2k+1} &=& (-i)^{2k}(-i) &=& -(-1)^k i \\ i^r &=& i^{2k+1} &=& i^{2k} i &=& (-1)^k i\end{array}$$

  となり，どちらも純虚数であり，互いに共役である．

以上より，(1) 式と (2) 式は互いに共役複素数である． □

注意. 複素数平面の知識と，ド・モアブルの定理[2] を知っていれば，上の命題は次のように証明できる：r を実数，$0 \leq \theta < 2\pi$ とし，$c = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく．ド・モアブルの定理から，

$$c^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$(\overline{c})^n = r^n(\cos\theta - i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

が成り立つ．よってこれらは互いに共役な複素数である．

[1] 2 つの複素数の和の共役複素数は，それぞれの共役複素数の和に等しい（$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$）ので，各項が共役なら，全体は共役である．

[2] ド・モアブルの定理：$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

上の命題は n が 0 以下の整数でも成り立つ．

命題． $c \neq 0$ を複素数，n を整数とする．このとき次が成り立つ．

$$(\overline{c})^n = \overline{c^n}$$

証明．前の命題より，$n > 0$ なら，主張は成り立つ．すなわち，$n > 0$ なら，$(\overline{c})^n$ は，c^n の共役複素数である．

$n > 0$ とする．u, v を実数として，$c^n = s + ti$ とおくと，$(\overline{c})^n = s - ti$ とかける．また，これらの -1 乗は，それぞれ次のように計算できる．

$$(s+ti)^{-1} = \frac{1}{s+ti} = \frac{s-ti}{s^2+t^2}, \qquad (s-ti)^{-1} = \frac{1}{s-ti} = \frac{s+ti}{s^2+t^2}$$

よって，c^{-n} と，$(\overline{c})^{-n}$ はそれぞれ共役複素数である．従って，

$$(\overline{c})^{-n} = \overline{c^{-n}}$$

が成り立ち，負の指数に対しても主張が成り立つことがわかる．

最後に $n = 0$ のときは，

$$(\overline{c})^0 = 1, \qquad \overline{c^0} = \overline{1} = 1$$

と計算でき，このときも主張がなり立つ．□

……………………………………………………………………………………

下の補題と次の 2 つの事実を使うことで，上の命題は簡単に証明できる．

- x と y の対称式は，基本対称式 $x+y$，xy で表せる．
- x と y の交代式は，$x-y$ を因数に持つ．

（上の命題の証明）．$\alpha = c$，$\beta = \overline{c}$ とおくと，下の補題から，$\alpha^n + \beta^n$ が実数であり，$\alpha^n - \beta^n$ が純虚数である事を示せば，α^n と β^n は互いに共役な複素数であることが従う．

$\alpha^n + \beta^n$ は，α, β の対称式なので，上の事実から，$\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ で表せるが，これはどちらも実数なので，$\alpha^n + \beta^n$ が実数であることが従う．

$\alpha^n - \beta^n$ は，α, β の交代式でなので，上の事実から，$\alpha - \beta$ を因数に持つ．これから，$F(\alpha, \beta) = \alpha^n - \beta^n$ とおくと，

$$F(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta)Q(\alpha, \beta) \tag{3}$$

と因数分解できる．一方，$F(\alpha, \beta)$ は交代式なので，

$$-F(\alpha, \beta) = F(\beta, \alpha) = (\beta - \alpha)Q(\beta, \alpha) = -(\alpha - \beta)Q(\beta, \alpha) \tag{4}$$

が成り立つ．よって，(3) 式と (4) 式を比べることで，$Q(\alpha, \beta)$ は，α，β の対称式であり，上と同様に考えることで，$Q(\alpha, \beta)$ は実数である．最後に，$\alpha - \beta$ は純虚数であることから，$\alpha^n - \beta^n$ が純虚数であることが従う．□

補題． 2 つの複素数 α，β に対して，次の 2 つの条件が成り立てば，α と β は互いに共役複素数である．

1. $\alpha + \beta$ が実数である．
2. $\alpha - \beta$ が純虚数である．

証明．実数 a_1, b_1, a_2, b_2 を用いて，$\alpha = a_1 + b_1 i$，$\beta = a_2 + b_2 i$ とおく．

- 条件 1. から，$\alpha + \beta = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ が実数なので，$b_2 = -b_1$ が従う．
- 条件 2. から，$\alpha - \beta = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$ が純虚数なので，$a_1 = a_2$ が従う．
- また条件 2. から，$b_1 \neq b_2$ であり，$b_2 = -b_1$ と合わせて，$b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ が従う．[3]

よって，$\beta = a_1 - b_1 i$ となり，これは α の共役複素数である．□

[3] 高校数学の定義では，0 は純虚数ではないことに注意する．