累乗根

定義. n を正の整数とする．このとき，n 乗して a になる数 x を，a の n **乗根**という．[1]

例. 1 の 3 乗根は，3 乗して 1 になる数であるから，三次方程式 $x^3-1=0$ の解に他ならない．$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ と因数分解できることから，

$$x=1,\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

が 3 つの 1 の 3 乗根である．（i は虚数単位）

定義. 2 乗根（平方根），3 乗根（平方根），4 乗根，$\cdots$ を，まとめて**累乗根**という．

記号 $\sqrt[n]{a}$ を次のように定義する．

定義. n を正の整数とする．

- $a>0$ で，
  - n が偶数なら，a の n 乗根のうち実数であるものは，正と負の 2 つ存在するので，そのうち正の方を $\sqrt[n]{a}$ で表す．
  - n が奇数なら，a の n 乗根のうち実数であるものは，1 つ存在するので，それを $\sqrt[n]{a}$ で表す．
- $a<0$ で，
  - n が偶数なら，a の n 乗根のうち実数であるものは，存在しない．
  - n が奇数なら，a の n 乗根のうち実数であるものは，1 つ存在するので，それを $\sqrt[n]{a}$ で表す．
- $a=0$ のとき，n の偶奇に関わらず，$\sqrt[n]{0}=0$ と定める．

注意. 「a の n 乗根」と，$\sqrt[n]{a}$ の違いに注意しよう．a の n 乗根とは，$x^n=a$ の解のことであり，n 個存在する．このうち，上に述べたような特別なもの 1 つを $\sqrt[n]{a}$ と表すのである．例えば，上の例で見たように，1 の 3 乗根は，$1,\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ の 3 つであり，そのうち実数であるものは 1 である．従って，$\sqrt[3]{1}=1$ である．

例.

- 9 の 4 乗根，すなわち，$x^4=9$ の解のうち，実数であるものは，$x=\pm\sqrt{3}$ である．よって，$\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}$ である．
- 125 の 3 乗根，すなわち，$x^3=125$ の解のうち，実数であるものは，$x=5$ のみである．よって，$\sqrt[3]{125}=5$ である．
- -16 の 4 乗根，すなわち，$x^4=-16$ の解のうち，実数であるものは存在しない．
- -8 の 3 乗根，すなわち，$x^3=-2$ の解のうち，実数であるものは，$x=-2$ のみである．よって，$\sqrt[3]{-8}=-2$ である．

注意. $n=2$ のとき，$\sqrt[2]{a}$ は，その定義から $\sqrt{a}$ のことである．よって，$\sqrt[2]{a}$ は，これまで通り，$\sqrt{a}$ と表す．

---

[1] a は複素数の範囲で定義可能であるが，高校数学では，実数の場合を考えることがほとんどである．

$\sqrt[n]{a}$ について，その定義から次が成り立つ．

$\sqrt[n]{a}$ の性質

$a>0, b>0$ とし，m, n, k を正の整数とする．このとき次が成り立つ．

1. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
5. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$

証明．証明には，次の 3 つの事実を用いる．

- 定義から，$(\sqrt[n]{A})^n = A$ が成り立つ．
- $A>0$ なら，$\sqrt[n]{A}>0$ が成り立つ．
- $A>0, B>0$ なら，$A^n = B^n \iff A = B$ が成り立つ．

1.
$$(\text{左辺})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab, \qquad (\text{右辺})^n = (\sqrt[n]{ab})^n = ab$$
より，$(\text{左辺})^n = (\text{右辺})^n$ が成り立つ．$a>0, b>0$ から，$\sqrt[n]{a}>0, \sqrt[n]{b}>0, \sqrt[n]{ab}>0$ なので，結果が従う．

2.
$$(\text{左辺})^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}, \qquad (\text{右辺})^n = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$$
より，$(\text{左辺})^n = (\text{右辺})^n$ が成り立つ．あとは同様に考えて結果が従う．

3.
$$(\text{左辺})^n = \left\{(\sqrt[n]{a})^m\right\}^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = \left\{(\sqrt[n]{a})^n\right\}^m = a^m, \qquad (\text{右辺})^n = (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$$
より，$(\text{左辺})^n = (\text{右辺})^n$ が成り立つ．あとは同様に考えて結果が従う．

4.
$$(\text{左辺})^{mn} = \left\{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right\}^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \qquad (\text{右辺})^{mn} = (\sqrt[mn]{a})^{mn} = a$$
より，$(\text{左辺})^{mn} = (\text{右辺})^{mn}$ が成り立つ．あとは同様に考えて結果が従う．

5.
$$(\text{左辺})^{nk} = \left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^{nk} = a^{mk}, \qquad (\text{右辺})^{nk} = \left\{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right\}^k = (a^m)^k = a^{mk}$$
より，$(\text{左辺})^{nk} = (\text{右辺})^{nk}$ が成り立つ．あとは同様に考えて結果が従う．

□

注意． 上の性質 1. は，次のように考えることもできる．
$X = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ とおく．$a>0, b>0$ から，$\sqrt[n]{a}>0, \sqrt[n]{b}>0$ なので，$X>0$ である．
$$X^n = \left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$$
が成り立つので，X は n 乗して ab になる正の実数である．よって，定義から，$X = \sqrt[n]{ab}$ である．