原始関数と不定積分

定義. 関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数，すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

となる関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の**原始関数**という．

　$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると，定数 C に対して，関数

$$F(x) + C$$

も $f(x)$ の原始関数である．よって，関数 $f(x)$ の原始関数が存在する場合には，無限に多くの原始関数が存在する．逆に，同じ関数の原始関数の差は必ず定数である．なぜならば，$F(x), G(x)$ がどちらも，$f(x)$ の原始関数であるとすると，

$$\{F(x) - G(x)\}' = f(x) - f(x) = 0$$

が成り立つからである．

例. $f(x) = 2x$ とする．このとき，$F(x) = x^2$ は，$f(x)$ の原始関数である．また，

$$x^2 + 1, \quad x^2 - 3, \quad x^2 + \sqrt{5}$$

なども $f(x)$ の原始関数である．

　連続関数 $f(x)$ に対しては，次が知られている．

定理. 連続関数 $f(x)$ の原始関数は必ず存在する．

　以下では，連続関数だけを考えることにする．関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の任意の原始関数は，定数 C に対して，$F(x) + C$ の形で表されるのであった．

定義. 関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする．このとき，

$$F(x) + C$$

の形で表される関数を（全てをまとめて）$f(x)$ の**不定積分**といい，記号

$$\int f(x)dx$$

で表す．不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めることを**積分する**といい，定数 C を**積分定数**という．

注意. 本来，不定積分は連続関数とは限らない関数に対して，原始関数とは関係ないものとして定義される．しかし，連続関数に対しては，不定積分が原始関数と一致する（微分積分学の基本定理）ことが示されるので，上のように定義しても問題はない．加えて，上で述べた定理も，本来であれば，連続関数の不定積分が必ず存在する（積分可能である）ことと，微分積分学の基本定理から導かれる事実である．

　積分の定義から（本来は微分積分学の定理から）連続関数に対しては，微分と積分が逆の演算であることがわかる．例えば，

$$x^2 + C \quad \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} \quad 2x$$

と計算できる．（C は定数）