確率の基礎

ある試行における全事象 U を全体集合 U として[1]，その試行における全ての事象を，全体集合 U のある部分集合として考えることができたことを思い出す．この対応により，

$$\text{ある事象 } A \text{ の起こる場合の数} = \text{集合 } A \text{ の要素の個数}$$

が成り立ち，これらを $n(A)$ と表すのであった．

それでは，確率を定義しよう．

定義.
- 1 つの試行において，どの根元事象も同じ程度起こることが期待されるとき，これらの根元事象は，**同様に確からしい**という．
- 全事象 U のどの根元事象も同様に確からしいとき，事象 A の**確率**を次のように定め，これを $P(A)$ で表す：

$$\text{事象 } A \text{ の確率} = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{全事象 } U \text{ の起こる場合の数}}\ ,\ \text{すなわち，}\quad P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

と定める．

例. さいころを 1 つ投げるという試行において，奇数の目が出るという事象を A とする．このとき，対応する全体集合 U と集合 A はそれぞれ，

$$U = \{1,2,3,4,5,6\}, \qquad A = \{1,3,5\}$$

と書けるので，事象 A の確率 $P(A)$ は，

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

である．

確率について次が成り立つ．

確率の基本性質

ある試行において，全事象を U，空事象を $\varnothing$ とする．このとき，任意の事象 A, B に対して，次が成り立つ．

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ であり，特に，$P(\varnothing) = 0$，$P(U) = 1$．
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   特に，A と B が互いに排反であるとき，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$．
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$．

証明.
1. まず，$n(\varnothing) = 0$ なので，$P(\varnothing) = \dfrac{n(\varnothing)}{n(U)} = 0$ ，$P(U) = \dfrac{n(U)}{n(U)} = 1$ が成り立つ．さらに，任意の事象 A に対して，$n(\varnothing) \leq n(A) \leq n(U)$ が成り立つので，

$$\frac{n(\varnothing)}{n(U)} \leq \frac{n(A)}{n(U)} \leq \frac{n(U)}{n(U)} \Longleftrightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

が従う．

[1] 根元事象を 1 つの要素からなる集合に対応させることで，事象全体と部分集合全体が 1 対 1 に対応する．

2. 集合の要素の個数に関する等式，$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ に注意すると，

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(U)} &= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(U)} \\ &= \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

が成り立つ．特に，A と B が互いに排反である場合は，$A \cap B = \varnothing$ が成り立つので，$n(A \cap B) = n(\varnothing) = 0$ が成り立ち，これから後半の主張も従う．

3. 集合の要素の個数に関する等式，$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$ に注意すると，

$$P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(U)} = \frac{n(U) - n(A)}{n(U)} = \frac{n(U)}{n(U)} - \frac{n(A)}{n(U)} = 1 - P(A)$$

が成り立つ．

□

確率の定義にある「同様に確からしい」には注意が必要である．次のような確率の問題において，２通りの解答を考察しよう．

問題． ２枚のコインを同時に投げるとき，どちらとも表が出る確率を求めよ．

解〇．問題の試行における根元事象は，

（表, 表），（表, 裏），（裏, 表），（裏, 裏）

の４つなので，

$$n(U) = 4$$

である．求める確率の事象を A とすると，

$$n(A) = 1$$

である．よって，求める確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

である． □

解 ×．問題の試行における根元事象は，

（表２枚），（表裏１枚ずつ），（裏２枚）

の３つなので，

$$n(U) = 3$$

である．求める確率の事象を A とすると，

$$n(A) = 1$$

である．よって，求める確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

である． □

誤解の無いように，「解」のすぐ後ろに，〇と × をつけたが，左の解答が正しく，右の解答が間違いである．原因は，確率の定義における「どの根元事象も同様に確からしいとき」すなわち，「どの根元事象も同じ程度起こることが期待されるとき」の部分にある．右の解答では，３つの根元事象のうち，明らかに，（表裏１枚ずつ）が起こる可能性が高いことがわかる．これは，２枚のコインを投げるという試行の方法を，「２人が違う部屋でそれぞれ１枚のコインを投げ，出た結果を記録しておいて後からその記録を合わせる」というように考えると，それぞれの部屋で，コインの表裏の出方は，同様に確からしいわけなので，（表, 裏）と（裏, 表）を合わせた（表裏１枚ずつ）が起こる可能性が高いことがイメージできるだろう．

確率の問題においては，$n(U)$ を考えることが必要になるが，その際に，きちんと「同様に確からしい根元事象」を考えることが重要である．そのための方法として，さいころやコインなどを複数枚投げるような問題については，それぞれのものを区別して根元事象を考えることが重要である．