独立試行の確率

定義.

- 2 つの試行において，互いの結果が他方の結果に影響を及ぼさないとき，これらの試行は**独立である**という．
- 3 つ以上の試行が**独立である**とは，どの 2 つの試行も独立であるときをいう．
- 複数の独立な試行をまとめて 1 つの試行とみるとき，この試行を**独立試行**という．

例. 次の 2 つの試行は独立である．

- 1 枚のコインを投げるという試行，
- 1 個のさいころを投げるという試行．

よって，

- 1 枚のコインと，1 個のさいころを同時に投げるという試行や，
- 1 個のコインを投げてから，続けて 1 個のさいころを投げるという試行

は，どちらも独立試行である．

注意. 複数の玉が入った箱から，

- 玉を 1 個取り出すという試行を T_1，
- 続けてもう 1 個取り出すという試行を T_2 とする．

このとき，

- 最初の玉を箱に戻す時は，試行 T_1, T_2 は独立であるが，
- 最初の玉を箱に戻さない時は，試行 T_1, T_2 は独立ではない

ことに注意する．

複数の独立な試行をまとめた独立試行におけるある事象の確率を考える際には，独立試行を構成している 1 つ 1 つの試行の事象ごとの確率を考えれば良い．これは，もとの試行の結果が他の試行の結果に影響を及ぼさないという定義から明らかであろう．

独立試行の確率

2 つの独立な試行を T_1, T_2 として，これらを合わせた独立試行を T とする．T_1 のある事象 A_1 と，T_2 のある事象 A_2 に対して，A_1 が起こり，A_2 が起こるという T の事象を A とする．このとき，次が成り立つ．

$$P(A) = P(A_1)P(A_2).$$

証明. 試行 T_1, T_2 の全事象をそれぞれ U_1, U_2 とすると，T の全事象 U は，直積集合 $U_1 \times U_2$ で表される集合である．すなわち，

$$U = U_1 \times U_2 := \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}$$

と書ける．また，$n(U) = n(U_1)n(U_2)$ が成り立つ[1]．同様に，$A_1 \subset U_1$，$A_2 \subset U_2$ に対して，

$$A = A_1 \times A_2 := \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$

であり，$n(A) = n(A_1)n(A_2)$ が成り立つ．以上に注意すると，

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{n(A_1 \times A_2)}{n(U_1 \times U_2)} = \frac{n(A_1)n(A_2)}{n(U_1)n(U_2))} = \frac{n(A_1)}{n(U_1)} \cdot \frac{n(A_2)}{n(U_2)} = P(A_1)P(A_2)$$

が成り立つ． □

[1] U_1 の 1 つの要素 x_1 に対して，$(x_1, *)$ の形の U の要素は，U_2 の要素の数だけあり，それが，U_1 の要素の数だけあるので，U_1 の要素の数と U_2 の要素の数の積が U の要素の数となる．

2つの独立な試行を合わせた独立試行におけるある事象の確率は，その事象を構成する1つ1つの事象の確率の積であることをみたが，これは，3つ以上独立な試行に関しても同様である．すなわち，次が成り立つ．

n 個の独立な試行を $T_1, T_2, \cdots, T_n$ として，これらを合わせた独立試行を T とする．$i = 1, 2, \cdots, n$ について，T_i のある事象 A_i に対して，A_1 が起こり，A_2 が起こり，$\cdots$，A_n が起こるという T の事象を A とする．このとき，次が成り立つ．

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

証明. T_1 と T_2 を合わせた独立試行を T_{12} とすると，A_1 が起こり，A_2 が起こるという試行 T_{12} の事象を A_{12} とすると，その確率は，$P(A_{12}) = P(A_1)P(A_2)$ である．さらに，T_{12} と T_3 は独立なので，T_{12} と T_3 を合わせた独立試行を T_{123} とし，A_{12} が起こり，A_3 が起こるという試行 T_{123} の事象を A_{123} とすると，その確率は，$P(A_{123}) = P(A_{12})P(A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ である．よって，あとは帰納的に考えて結果を得る． □

定義. 独立な同じ試行を何回も繰り返すという　独立試行を**反復試行**という．

例. 次のような試行は反復試行である．

- さいころを何回か投げるという試行．
- 箱から球を取り出して元に戻すということを何回か繰り返すという試行．

反復試行は独立試行の特別な場合であるから，反復試行における事象の確率を求めるためには，独立試行のときと同様に，1つ1つ試行における事象の確率を求めればよい．先ほどより少し複雑になったと感じるかもしれないが，それは単に回数が増えたからである．

反復試行の確率

ある試行において，事象 A が起こる確率を p とする．この試行を n 回繰り返すという反復試行において，事象 A が r 回起こるという事象の確率は，

$${}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r}$$

である．

証明. 1回の試行において，事象 A が起こる確率が p なので，事象 A が起こらない確率は $1-p$ であり，n 回繰り返される試行のうち，r 回 A が起こり，$n-r$ 回 A が起こらない確率は，

$$p^r(1-p)^{n-r}$$

である．これは積が順序によらないことから，A が起こる回数だけに依り，順番によらないことがわかる．

次に，このようなパターンが何通りあるか考える．1回の試行において，事象 A が起こることを「◯」で表し，事象 A が起こらないことを「×」で表す．そして，n 回の試行における結果を

$$\bigcirc \times \times \bigcirc \cdots \bigcirc$$

のように，合計 n 個の「◯」と「×」で表すことにする．この方法で，求める場合の数は，n カ所から，（◯の場所）r カ所を選ぶ組合せの総数と考えることができ，それは，${}_n\mathrm{C}_r$ 通りである．

最後に，今考えた ${}_n\mathrm{C}_r$ 通りの場合は，互いに排反（同時に起こり得ない）なので，求める確率は，$p^r(1-p)^{n-r}$ の ${}_n\mathrm{C}_r$ 個の和である．よって結果が従う． □