等式の証明の基礎

等式 $A=B$ を証明するためには，次の方法を用いることが多い．

等式の証明の基本

1. A を変形し，B を導く．（$A=\cdots=B$）
2. A と B をそれぞれ変形し，同じ式を導く．（$A=\cdots=C$，$B=\cdots=C$）
3. $A-B=0$ を示す．（$A-B=\cdots=0$）

条件式が与えられている場合の等式の証明では，次のことに気を付けて式変形を行うと良い．

条件付き等式の証明の基本

- 条件式を用いて，求めたい等式の文字を減らす．
- 条件式を含む形に変形し，条件式を丸ごと代入する．

例． $x+y+z=0$ のとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$x^3+y^3+z^3=3xyz$$

２通りの方法で証明しよう．

証明 1．文字数を減らす方針で，等式の証明の基本 2. の方法を用いて証明する．
条件式から $z=-x-y$ が成り立つので，これを左辺に代入すると，

$$（左辺）=x^3+y^3+(-x-y)^3=x^3+y^3-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)=-3xy(x+y)$$

と変形できる．一方，右辺も同じ条件式を代入することで，

$$（右辺）=3xy(-x-y)=-3xy(x+y)$$

と変形できる．以上で等式が証明できた． □

証明 2．条件式を丸ごと代入する方針で，等式の証明の基本 3. の方法を用いて証明する．
（左辺）$-$（右辺）$=0$ を示せば良い．条件式 $x+y+z=0$ に注意すると，

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0\cdot(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$$

と変形できる．よって等式が証明できた． □

$x\neq y$ という条件が与えられている場合には，次の方針に従うと良い．

条件 $x\neq y$ の扱い方の基本

条件 $x\neq y$ から，$x-y\neq 0$ なので，式を $x-y$ で割り，簡単にすることができる．

例． 複素数 x,y に対して，$x\neq y$ のとき，$x^3-y^3=0$ ならば，$(x+y)^2=xy$ を示せ．

証明．仮定より，$0=x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ が成り立つので，両辺を $x-y$ で割ることにより，等式，

$$x^2+xy+y^2=0$$

を得る．この式を変形すれば，結果の式が従う． □

定義. a, b, c, d を 0 でない実数とする.

- 比 $a : b$ に対して, $\dfrac{a}{b}$ の値を**比の値**という.(比 $a : b$ とは, a と b の関係を表したものであった.)
- 比 $a : b$ と比 $c : d$ に対して,これらの比の値が等しいとき,**比 $a : b$ と比 $c : d$ は等しい**といい, $a : b = c : d$ と表す.また,このような比の等式を**比例式**という.

定義から,明らかに次が成り立つ.

$$a : b = c : d \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \iff ad = bc$$

定義. n を 3 以上の整数として, $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ を 0 でない実数とする.

- 3 つ以上の数の比 $a_1 : a_2 : \cdots : a_n$ を, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の**連比**という.
- 2 つの連比が等しい事を次のように定義する.

$$a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n \iff \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

比例式の扱いの基本

比例式は「$= k$」とおくことで,文字を減らすことができる.

$$\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k \quad \text{とおくと,} \quad a_1 = kb_1, \cdots, a_n = kb_n \quad \text{が成り立つ.}$$

例. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ のとき,次の等式が成り立つことを示せ.ただし, $a \neq b, c \neq d$ とする.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

証明. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ とおくと, $k \neq 1$ であり, $a = kb$, $c = kd$ が成り立つ.これを用いて,

$$(\text{左辺}) = \frac{kb+b}{kb-b} = \frac{b(k+1)}{b(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}, \qquad (\text{右辺}) = \frac{kd+d}{kd-d} = \frac{d(k+1)}{d(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}$$

と変形できるので,主張の等式が従う. □

a を定数とする.複数の変数に対して,「少なくとも 1 つは a である」や「すべて a である」ことを証明する場合には,主張を同値な等式に置き換え,その等式を証明すれば良い.[1]

「少なくとも $\cdots$」や「すべて $\cdots$」の示し方の基本

- $x_1, \cdots, x_n$ のうち少なくとも 1 つは a である. $\iff (x_1 - a) \cdots (x_n - a) = 0$
- $x_1, \cdots, x_n$ はすべて a である.($x_1, \cdots, x_n, a$ は実数) $\iff (x_1 - a)^2 + \cdots + (x_n - a)^2 = 0$

例. $xy + yz + zx = x + y + z$, $xyz = 1$ のとき, x, y, z の少なくとも 1 つは 1 であることを示せ.

証明. $(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - (xy + yz + zx) + (x + y + z) - 1 = 0$ から従う. □

例. $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + x = 3$ のとき, x, y, z はすべて 1 であることを示せ.

証明. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - 2(x + y + z) + 3 = 0$ から従う. □

[1] 2 つ目の主張(すべて $\cdots$ の方)の同値性は,「A が実数 $\Rightarrow A^2 \geq 0$」という性質を用いているため,実数にしか適用できない.それに対して, 1 つ目の主張(少なくとも $\cdots$ の方)の同値性は,「$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ または $B = 0$」という複素数でも成り立つ性質から従うものなので,複素数に対しても使用できる.