問題. 定数 a に対して，次の問いに答えよ.

1. $x+y-1=xy=a$ であるとき，x, y のどちらか 1 つは a であることを示せ.
2. $xy+yz+zx=a(x+y+z)$，$xyz=a^3$ であるとき，x, y, z の少なくとも 1 つは a であることを示せ.
3. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=0$ であるとき，x, y, z の少なくとも 2 つは同じ値であることを示せ.

少なくとも $\cdots$ 問題

問題. 定数 a に対して，次の問いに答えよ.

1. $x+y-1=xy=a$ であるとき，x, y のどちらか 1 つは a であることを示せ.
2. $xy+yz+zx=a(x+y+z)$，$xyz=a^3$ であるとき，x, y, z の少なくとも 1 つは a であることを示せ.
3. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=0$ であるとき，x, y, z の少なくとも 2 つは同じ値であることを示せ.

次のように，問題の結論を，同値な等式に置き換えることで，「証明すること」が明確になる.

定数 a に対して，次の２つの主張は同値である.

- x, y, z の少なくとも１つは a である.
- $(x-a)(y-a)(z-a)=0$ が成り立つ.

この事実を用いて，次のように解答できる.

解. 1. $(x-a)(y-a)=0$ を示せば良い.

$$(x-a)(y-a)=xy-(x+y)a+a^2$$

であり，仮定から，$x+y=a-1$，$xy=a$ であるので，これを代入すると，

$$(x-a)(y-a)=a-(a-1)a+a^2=0$$

が従う.

2. $(x-a)(y-a)(z-a)=0$ を示せば良い.

$$(x-a)(y-a)(z-a)=xyz-(xy+yz+zx)a+(x+y+z)a^2-a^3$$

である．仮定の式を代入すると，

$$(x-a)(y-a)(z-a)=a^3-(x+y+z)a^2+(x+y+z)a^2-a^3=0$$

が従う.

3. $(x-y)(y-z)(z-x)=0$ を示せば良い.

$$\begin{aligned}(x-y)(y-z)(z-x)&=xyz-x^2(y-z)-y^2(z-x)-z^2(x-y)-xyz\\&=-\{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\}\end{aligned}$$

であり，仮定の式を代入すると，

$$(x-y)(y-z)(z-x)=0$$

が従う.

□

注意. このように，「少なくとも $\cdots$」タイプの問題は，上で述べたように，「(結論と同値な）等式を示す」問題であると読み替えることで考えやすくなる.