不等式の証明の基礎

まずは，実数の大小関係や，実数の平方の基本性質について確認する．

実数の大小関係の基本性質

- 実数 a, b に対して，次のどれか 1 つだけが成り立つ．

$$a > b, \qquad a = b, \qquad a < b.$$

- 実数 a, b, c に対して，次が成り立つ．

1. $a > b,\quad b > c \implies a > c$
2. $a > b \implies a + c > b + c,\quad a - c > b - c$
3. $a > b,\quad c > 0 \implies ac > bc,\quad \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$
4. $a > b,\quad c < 0 \implies ac < bc,\quad \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

不等式 $A > B$ を証明するためには，次の方法を用いることが多い．

不等式の証明の基本

不等式 $A > B$ を証明するためには，$A - B$ を変形し，$A - B > 0$ を導く．

$$A - B = \cdots > 0$$

例． $x > 1, y > 2$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$xy + 1 > 2x + y - 1$$

証明．仮定から，$x - 1 > 0, y - 2 > 0$ である．これに注意して（左辺）$-$（右辺）を計算すると，

$$xy + 1 - (2x + y - 1) = xy - 2x - y + 2 = (x - 1)(y - 2) > 0$$

となり，結果の不等式が従う． □

上の例のように，条件が与えられている場合は，その条件を用いて，不等式を証明できる．条件が与えられていない場合でも，次の実数の平方の性質を用いると，不等式を証明できることがある．証明は実数の大小関係の基本性質から明らかである[1]．

実数の平方の性質

実数 a，$a_1, \cdots, a_n$ に対して，次が成り立つ．

- $a^2 \geq 0$．等号成立は，$a = 0$ のとき．
- $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$．等号成立は，$a_1 = \cdots = a_n = 0$ のとき．

例． 次の不等式を示せ．

$$x^2 - x + 1 > 0$$

証明．実数の平方の性質に注意すると次のように計算できる：$x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0.$ □

---

[1] 実数の大小関係の基本性質から，$a > 0$，$a = 0$，$a < 0$ のいずれか 1 つが成り立つ．それぞれの場合において，両辺に a をかけることで，$a^2 > 0$，$a^2 = 0$，$a^2 < 0$ が従う．等号成立条件もこれから従う．

正の実数の大小関係を調べるには，それぞれの平方の大小関係を調べれば良い．

実数の平方の大小関係の性質

$A>0$，$B>0$ とする．このとき次が成り立つ：　$A>B \iff A^2>B^2$

証明．仮定から，$A+B>0$ である．

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

より，A^2-B^2 と $A-B$ の符号が一致することがわかる．□

注意． $A>0$，$B>0$ なら，$A=B \iff A^2=B^2$ なので，上の結果と合わせて，

$$A \geq B \quad \iff \quad A^2 \geq B^2$$

が成り立つ．また仮定は，$A \geq 0$，$B \geq 0$ でも良い．

例． $x>-1$ のとき，次の不等式を示せ．

$$x+2>\sqrt{2x+3}$$

証明．仮定から，$x+2>0$，$\sqrt{2x+3}>0$ なので，両辺を 2 乗して比較すれば良い．

$$(x+2)^2-(\sqrt{2x+3})^2=x^2+4x+4-(2x+3)=x^2+2x+1=(x+1)^2>0$$

と計算できることから，結果が従う．□

次に絶対値を含む不等式の扱い方について述べる．そのために，まずは絶対値の性質について確認する．始めの性質は絶対値の定義として採用される場合も多い．

絶対値の性質

$$|a|=\begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$ $\cdots$ a は負の数なので，$-a>0$ に注意する．

- $|a| \geq 0$
- $|a|^2=a^2$
- $|a|=|-a|$
- $|a| \geq a$
- $|a| \geq -a$

例． 次の不等式を証明せよ．

$$|a-b| \leq |a|+|b|$$

証明．絶対値の性質から，$|a-b| \geq 0$，$|a|+|b| \geq 0$ なので，両辺を 2 乗して比較すれば良い．

$$(|a|+|b|)^2-|a-b|^2=|a|^2+2|ab|+|b|^2-(a^2-2ab+b^2)=2(|ab|+ab) \geq 0$$

と計算できるので，求める不等式が従う．等号が成立するのは，$|ab|+ab=0$ のとき，すなわち $ab \leq 0$ のときである．□

不等式 $A>B$ の証明の基本

- 条件があるときは，条件を使用して $A-B>0$ を導く．
- 条件がない場合は，実数の性質の使用を考える．$A-B=\cdots=(\cdots)^2 \geq 0$
- $A>0, B>0$ なら，両辺の 2 乗を比較しても良い．$A^2-B^2=\cdots>0$
- 絶対値や $\sqrt{\ }$ を含む不等式は，両辺が正である（ようにできる）ことが多いので，その場合は「両辺を 2 乗して比較する方針」が使える．2 乗することで絶対値や $\sqrt{\ }$ を外すことができるので，この方法は有効である．
- $\geq$ や $\leq$ の不等式では，等号成立条件の確認を忘れてはいけない．