



2 次方程式

2 次方程式の解法

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) の解は、次の方法で導く事ができる。

1. 平方根の定義を利用する.

$x^2 = A$, ($A > 0$) と式変形できる場合は、平方根の定義から、 $x = \pm\sqrt{A}$ を得る.

2. 因数分解を利用する.

$ax^2 + bx + c = (px + q)(sx + t)$ と因数分解できる場合は、

「 $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ または、 $B = 0$ 」 という性質を利用して、解 $x = -\frac{q}{p}, -\frac{t}{s}$ を得る.

3. 解の公式を利用する.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b が偶数のとき、すなわち $b = 2b'$ の形のときは、少し簡単な解の公式が利用できる.

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

解の公式は、次のような式変形により導出される.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (a \neq 0 \text{ に注意数する})$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad (\text{平方完成})$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

さらに $b = 2b'$ であれば、次のように計算できる.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

実数解の個数については、解の公式から次の事が分かる.

2 次方程式の実数解の個数

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) について、 $D = b^2 - 4ac$ とおき、これを判別式と呼ぶ。判別式は、解の公式の根号の中の部分であり、判別式の符号から実数解の個数が分かる。

1. $D > 0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ

2. $D = 0 \iff$ ただ 1 つの実数解をもつ (重解をもつ)

3. $D < 0 \iff$ 実数解をもたない