## ２次方程式の解と判別式

虚数単位 $i$ を定義したことによって，次のように負の数の平方根[1] を求めることができるようになった．$a$ を正の実数として，２次方程式

$$x^2 = -a \tag{1}$$

の解を考える．$a > 0$ なので，実数 $\sqrt{a}$ は存在するが，２次方程式 (1) の解は，実数の範囲では存在しない．しかし，純虚数 $\sqrt{a}i$ の２乗は，

$$(\sqrt{a}i)^2 = \sqrt{a}^2 \cdot i^2 = a \cdot (-1) = -a$$

と計算できることから，$\sqrt{a}i$ は，$-a$ の平方根である．また同様にして，$(-\sqrt{a}i)^2 = -a$ が成り立つので，$-\sqrt{a}i$ も $-a$ の平方根である．[2]

記号 $\sqrt{\phantom{a}}$ は，「（２つある）平方根の正の方」と定義されていた．複素数に大小関係は存在しないが，上の結果から，負の数の平方根を次のように定義しても問題ない．

**定義.** $i$ を虚数単位として，$a > 0$ とする．このとき，負の数の平方根を次のように定める：

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i.$$

以上の結果は重要なので，改めてまとめておく．

> $i$ を虚数単位として，$a > 0$ とする．このとき，$-a$ の平方根は，$\pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a}i$ である．

**注意.** これまでに学習した平方根の性質 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ などは，$a > 0, b > 0$ の時に成り立つ性質であって，そうでない場合は必ずしも成り立たない．例えば，次のようなことが起きる：

$$\sqrt{-3}\sqrt{-5} = \sqrt{3}i\sqrt{5}i = i^2\sqrt{3}\sqrt{5} = -\sqrt{15} \neq \sqrt{15} = \sqrt{(-3)(-5)}$$

このため，負の数の平方根の計算は，**必ず $\sqrt{a}i$ の形に直してから計算する**ことに注意する．

準備が整ったので一般的な２次方程式の解を求めよう．これまで判別式の値が負のときは，「（実数）解なし」としていた部分を，虚数の導入により考えることができるようになった．

$a \neq 0, b, c$ を実数とし，実数係数の２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を，複素数の範囲で考える．$D = b^2 - 4ac$ を判別式とする．解の公式は，$D \geq 0$ のときに，次のような式変形で得られるのであった．

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

ここで，５行目において $b^2 - 4ac$ の平方根をとる必要があったため，$D = b^2 - 4ac \geq 0$ という条件をつけていたが，負の数の平方根を考えられるようになった今，この条件は必要なくなった．$D = b^2 - 4ac < 0$ のとき，

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{4ac - b^2} \cdot i$$

は虚数なので，このときは，「虚数解を持つ」ことがわかる．

1. $D > 0 \iff$ 異なる２つの実数解をもつ
2. $D = 0 \iff$ 重解（実数解）をもつ
3. $D < 0 \iff$ 異なる２つの虚数解をもつ

---

[1] $a$ の平方根とは，２乗して $a$ になる数のこと．すなわち，$x^2 = a$ の解のことであった．

[2] $x^2 + a = (x - \sqrt{a}i)(x + \sqrt{a}i)$ と因数分解できる．