



2次不等式

2次関数のグラフと2次方程式

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ において、 $y = 0$ としたものに他ならない。よって、次の事が従う。

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ の実数解} \iff y = ax^2 + bx + c \text{ と } x \text{ 軸 } (y = 0) \text{ との共有点の } x \text{ 座標}$$

2次関数のグラフを用いて、2次方程式の実数解の個数を調べてみよう。

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は、 $D = b^2 - 4ac$ とおくと、

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a} \quad (1)$$

と平方完成でき、頂点の y 座標は、 $-\frac{D}{4a}$ である事が分かる。

<p>$D > 0, a > 0$ のとき</p> <p>グラフの形：下に凸</p> <p>頂点の y 座標：$-\frac{D}{4a} < 0$</p> <p>共有点の個数：2個.</p>		<p>$D > 0, a < 0$ のとき</p> <p>グラフの形：上に凸</p> <p>頂点の y 座標：$-\frac{D}{4a} > 0$</p> <p>共有点の個数：2個.</p>	
<p>$D = 0, a > 0$ のとき</p> <p>グラフの形：下に凸</p> <p>頂点の y 座標：$-\frac{D}{4a} = 0$</p> <p>共有点の個数：1個.</p>		<p>$D = 0, a < 0$ のとき</p> <p>グラフの形：上に凸</p> <p>頂点の y 座標：$-\frac{D}{4a} = 0$</p> <p>共有点の個数：1個.</p>	
<p>$D < 0, a > 0$ のとき</p> <p>グラフの形：下に凸</p> <p>頂点の y 座標：$-\frac{D}{4a} > 0$</p> <p>共有点の個数：0個.</p>		<p>$D < 0, a < 0$ のとき</p> <p>グラフの形：上に凸</p> <p>頂点の y 座標：$-\frac{D}{4a} < 0$</p> <p>共有点の個数：0個.</p>	

以上より、2次方程式についても、 D の符号を調べれば、実数解の個数が分かる。

2次方程式の実数解の個数

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について、 $D = b^2 - 4ac$ とする。このとき、

- $D > 0$ なら、実数解は2個
- $D = 0$ なら、実数解は1個
- $D < 0$ なら、実数解は存在しない

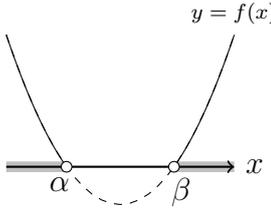
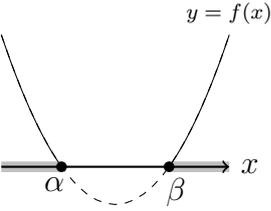
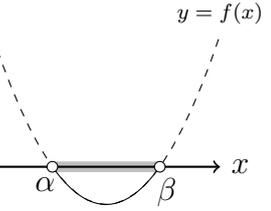
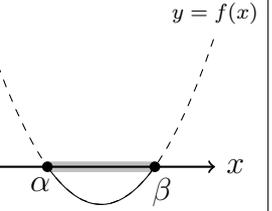
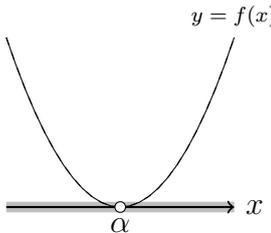
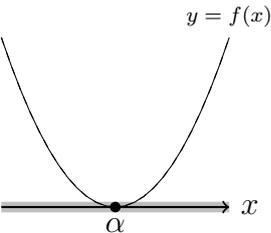
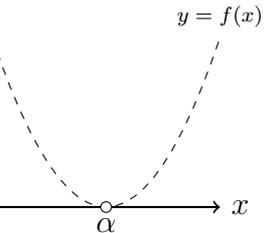
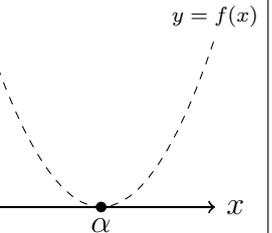
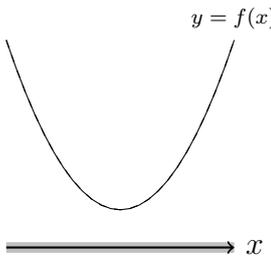
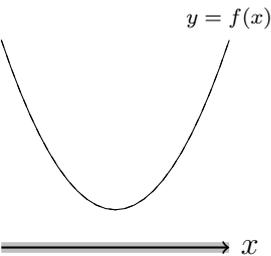
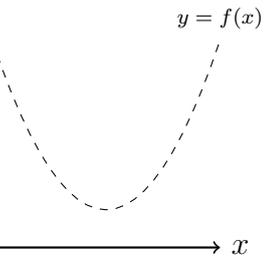
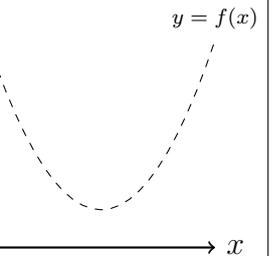
2次関数のグラフと2次不等式

2次不等式は、次の4つのパターンに分けられる。

1. $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)
2. $ax^2 + bx + c \geq 0$ ($a > 0$)
3. $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$)
4. $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($a > 0$)

注意. $a < 0$ の場合は、両辺に -1 を掛けることによって、左のいずれかのパターンに帰着できることに注意する. 例えば、
 $-3x^2 + 4x + 5 > 0$
 は、両辺に -1 を掛けることで、
 $3x^2 - 4x - 5 < 0$
 となり、これは左のパターン3. である。

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) とし、 $D = b^2 - 4ac$ とする. このとき、解は次のようになる。

	1. $f(x) > 0$	2. $f(x) \geq 0$	3. $f(x) < 0$	4. $f(x) \leq 0$
$D > 0$	 <p>$x < \alpha, \beta < x$</p>	 <p>$x \leq \alpha, \beta \leq x$</p>	 <p>$\alpha < x < \beta$</p>	 <p>$\alpha \leq x \leq \beta$</p>
$D = 0$	 <p>α以外の全ての実数</p>	 <p>全ての実数</p>	 <p>解なし</p>	 <p>$x = \alpha$</p>
$D < 0$	 <p>全ての実数</p>	 <p>全ての実数</p>	 <p>解なし</p>	 <p>解なし</p>