根軸と根軸定理

定義. **根軸**とは，同心円でない２つの円に対する方べきの値が等しい点の集まりのことをいう．

まず，方べきの値について復習する．：**方べき（の値）**とは，円と点に対して決まる次の値のことを言うのであった．

$$(\text{方べきの値}) = (\text{点と円の中心の距離})^2 - (\text{円の半径})^2$$

定義から明らかに，次が成り立つ．

- 点 P が円の外部にある．$\Leftrightarrow$ (方べきの値) > 0
- 点 P が円周上にある．$\Leftrightarrow$ (方べきの値) $= 0$
- 点 P が円の内部にある．$\Leftrightarrow$ (方べきの値) < 0

以下，同心円でない２つの円

$$C_1 : (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1^2 \quad , \quad C_2 : (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = r_2^2$$

を考える．中心をそれぞれ，O_1，O_2 とすると，仮定より，$\mathrm{O}_1(a_1, b_1) \neq \mathrm{O}_2(a_2, b_2)$ である．簡単な計算で次が示される．

命題. 同心円でない２つの円 C_1，C_2 の根軸は，直線である．

証明. C_1，C_2 の根軸上の任意の点を $\mathrm{P}(X, Y)$ とすると，根軸の定義から，２つの円の方べきの値を比較して，

$$(X-a_1)^2 + (Y-b_1)^2 - r_1^2 = (X-a_2)^2 + (Y-b_2)^2 - r_2^2$$

が成り立つ．これを解いて，

$$2(a_1-a_2)X + 2(b_1-b_2)Y = (a_1^2 - a_2^2) + (b_1^2 - b_2^2) - (r_1^2 - r_2^2) \tag{1}$$

を得る．仮定から，$(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ なので，これは直線である． □

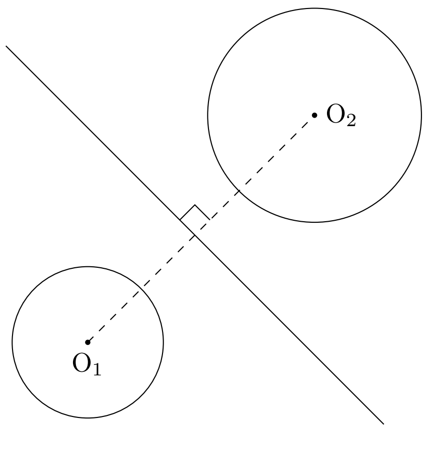
命題. 同心円でない２つの円 C_1，C_2 の根軸は，中心を結ぶ直線に対して垂直である．

証明. 前の命題の式 (1) を用いて傾きを比較すれば良い．

- $a_1 = a_2$ の時，
  直線 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ は y 軸に平行な直線であり，前の命題の式 (1) から，根軸は，x 軸に平行な直線なので，この場合は良い．

- $b_1 = b_2$ の時，
  直線 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ は x 軸に平行な直線であり，前の命題の式 (1) から，根軸は，y 軸に平行な直線なので，この場合は良い．

- $a_1 \neq a_2$ かつ，$b_1 \neq b_2$ の時，
  直線 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ の傾きは，$\dfrac{b_1-b_2}{a_1-a_2}$ であり，前の命題の式 (1) から，根軸の傾きは，$-\dfrac{a_1-a_2}{b_1-b_2}$ である．２つの傾きの積が -1 であるので，２直線は垂直である．



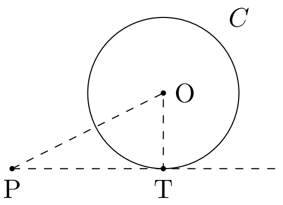
□

注意. 円 C に対して，点 P が円の外側にある時，円 C と点 P に対する方べきの値は，点 P と接点の距離の 2 乗に等しい：

右図のように，円 C の中心を O とし，点 P から円 C に引いた接線の接点を T とする．直角三角形 POT に対する三平方の定理から，

$$\mathrm{PT}^2 = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{OT}^2$$

が成り立つが，これは円 C と点 P に対する方べきの値である．



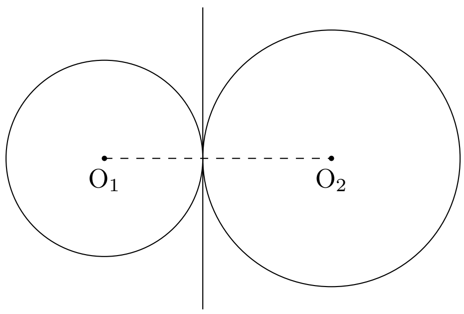
根軸は，次のように特徴付けることができる．

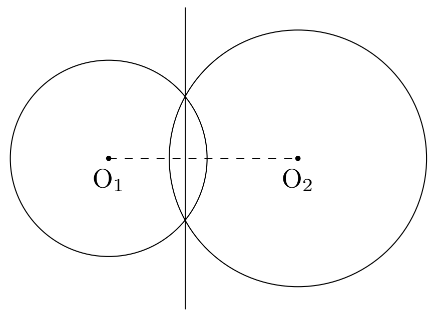
定理. 同心円でない 2 つの円 C_1，C_2 に対して，

(i) C_1，C_2 が共有点を持たない場合，
根線は，C_1，C_2 に引いた接線の長さが等しくなる点の集まりである．

(ii) C_1，C_2 が接している場合，
根軸は，2 つの円の共通接線である．

(iii) C_1，C_2 が 2 点で交わる場合，
根軸は，その 2 点を通る直線である．





証明. (i) 前の注意より，明らかである．
(ii) 接点に対して，円 C_1 の方べきの値と，円 C_2 の方べきの値は共に 0 である．よって接点は，根軸上の点である．前の命題から，根軸は，直線 $\mathrm{O_1O_2}$ に垂直であるから結果が従う．
(iii) 2 つの円の 2 つの共有点は，どちらの円の円周上の点でもあるので，方べきの値は，共に 0 である．よってどちらの共有点も根軸上の点である．前の命題から，根軸は直線なので結果が従う．
□

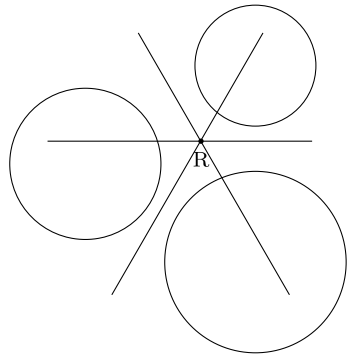
根軸定理

定理. どの 2 つも同心円でない 3 つの円 C_1，C_2，C_3 を考える．
C_1 と C_2，C_2 と C_3，C_3 と C_1 の根軸をそれぞれ ℓ_{12}，ℓ_{23}，ℓ_{31} とする．
この時，ℓ_{12}，ℓ_{23}，ℓ_{31} は平行であるか，1 点で交わる．後者の場合，その点を**根心**と言う．

証明. 3 つの円の中心が一直線上にある場合，前の命題から，根軸は全てその直線に垂直であるから，ℓ_{12}，ℓ_{23}，ℓ_{31} は平行である．
そうでない場合を考える．簡単のため，点 R と円 C に対する方べきの値を $p(\mathrm{R}, C)$ と書くことにする．今，根軸 ℓ_{12}，ℓ_{23} は平行ではないので，その交点を R とする．根軸 ℓ_{31} が，点 R を通ることを示せば良い．そのためには，

$$p(\mathrm{R}, C_3) = p(\mathrm{R}, C_1)$$

であることを示せば良いが，これは，点 R は ℓ_{12} 上の点なので，$p(\mathrm{R}, C_1) = p(\mathrm{R}, C_2)$ が成り立つことと，点 R は ℓ_{23} 上の点でもあるので，$p(\mathrm{R}, C_2) = p(\mathrm{R}, C_3)$ が成り立つことから従う．



□