加比の理

定理. n を正の整数とする．実数 a_i, b_i, p_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）に対して，

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

が成り立つならば，

$$\frac{p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n}{p_1b_1 + p_2b_2 + \cdots + p_nb_n} = k$$

が成り立つ．

証明．仮定から，$a_i = kb_i$（$i = 1, 2, \cdots, n$）が成り立つので，

$$\frac{p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n}{p_1b_1 + p_2b_2 + \cdots + p_nb_n} = \frac{k(p_1b_1 + p_2b_2 + \cdots + p_nb_n)}{p_1b_1 + p_2b_2 + \cdots + p_nb_n} = k$$

が成り立つ． □

例. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$ のとき，

$$\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$$

が成り立つ．これは，上の定理（加比の理）の $n = 3$，$p_1 = p_2 = p_3 = 1$ の場合である．

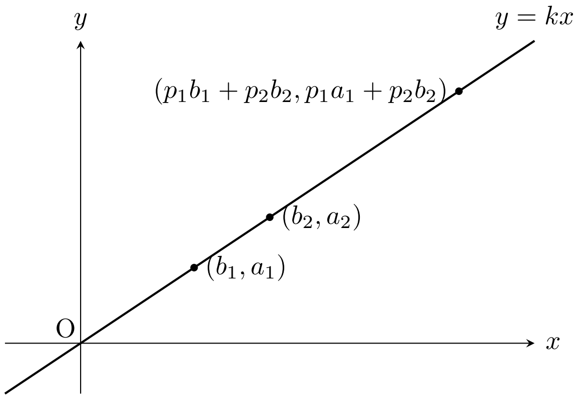
加比の理の幾何学的な意味を知っていることは有用である．

$$\frac{a}{b} \quad \longleftrightarrow \quad y = \frac{a}{b}x \text{ のグラフの傾き} \quad \longleftrightarrow \quad 2\text{ 点 } (0,0), (b,a) \text{ を通る直線の傾き}$$

という対応を考えることで，条件式を幾何学的に捉えることができる．

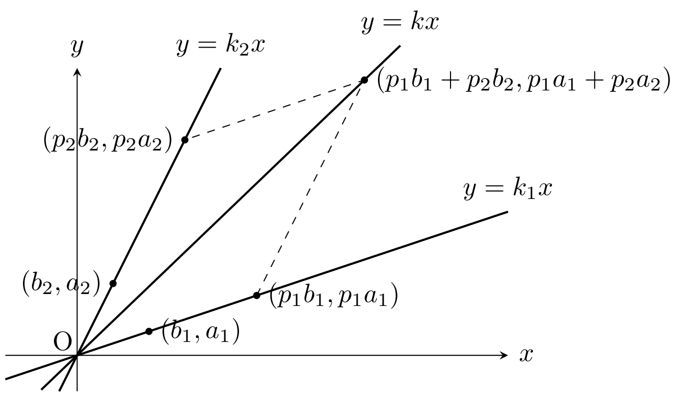
加比の理のイメージ

$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = k$ は，3 点 $(0,0), (b_1, a_1), (b_2, a_2)$ が，同一直線（$y = kx$）上にあるということであり，このとき，点 $(p_1b_1 + p_2b_2, p_1a_1 + p_2b_2)$ も同じ直線上にあることがわかる．



加比の理（不等式版）のイメージ

$k_1 = \dfrac{a_1}{b_1} < \dfrac{a_2}{b_2} = k_2$，$\dfrac{p_1a_1 + p_2a_2}{p_1b_1 + p_2b_2} = k$ とすると，直線 $y = kx$ は，下図のような平行四辺形の対角線である．直線の傾きを比較すると，$k_1 < k < k_2$ が従う．



加比の理の不等式版を紹介する．

定理． n を正の整数とする．正の実数 a_i, b_i, p_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）に対して，

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \cdots \leq \frac{a_n}{b_n} \tag{1}$$

が成り立つならば，

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 b_1 + p_2 b_2 + \cdots + p_n b_n} \leq \frac{a_n}{b_n}$$

が成り立つ．等号が成立するのは，仮定 (1) の等号がすべて成り立つときである．

証明．$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$\dfrac{a_i}{b_i} = k_i$ とおくと，$a_i = k_i b_i$ であり，仮定から，

$$k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$$

が成り立つ．これから，$j = 1, 2, \cdots, n$ に対して，

$$p_i k_1 b_i \leq p_i k_j b_i \leq p_i k_n b_i$$

であることに注意すると，

$$\frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_1 b_1 + \cdots + p_n b_n} = \frac{p_1 k_1 b_1 + \cdots + p_n k_n b_n}{p_1 b_1 + \cdots + p_n b_n} \begin{cases} \leq \dfrac{k_n(p_1 b_1 + \cdots + p_n b_n)}{p_1 b_1 + \cdots + p_n b_n} = k_n \\[2ex] \geq \dfrac{k_1(p_1 b_1 + \cdots + p_n b_n)}{p_1 b_1 + \cdots + p_n b_n} = k_1 \end{cases}$$

と評価できる．等号が成り立つのは，$k_1 = k_2 = \cdots = k_n$ のときである．□

例． a, b, c, d を正の実数とする．$\dfrac{1}{2} < \dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} < 3$ のとき，次が成り立つ．

$$\frac{1}{2} < \frac{a + c + 5}{b + d + 5} < 3$$

これは，（上の定理の証明と同様に）次のように示すことができる：

$$\frac{1}{2} = k_1, \quad \frac{a}{b} = k_2, \quad \frac{c}{d} = k_3, \quad 3 = k_4$$

とおくと，$1 = 2k_1$，$a = k_2 b$，$c = k_3 d$ であり，仮定より，$k_1 < k_2 < k_3 < k_4$ が成り立つ．よって，

$$\frac{a + c + 5}{b + d + 5} = \frac{2 \cdot 1 + a + c + 3}{2 \cdot 2 + b + c + 1} = \frac{2 \cdot 2k_1 + k_2 b + k_3 c + k_4}{2 \cdot 2 + b + c + 1}$$

は次のように評価できる．

$$\frac{1}{2} = k_1 = \frac{k_1(2 \cdot 2 + b + c + 1)}{2 \cdot 2 + b + c + 1} < \frac{2 \cdot 2k_1 + k_2 b + k_3 c + k_4}{2 \cdot 2 + b + c + 1} < \frac{k_4(2 \cdot 2 + b + c + 1)}{2 \cdot 2 + b + c + 1} = k_4 = 3$$

これから結果が従う．