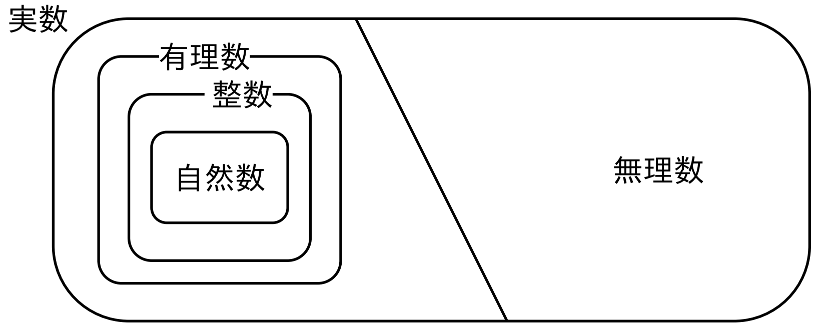
実数と平方根

定義.
- **実数**とは，数直線上の点として表すことのできる数の事をいう．
- **自然数**とは，数 $1, 2, 3, \cdots$ の事をいう．
- **整数**とは，数 $0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$ の事をいう．
- **有理数**とは，整数 a と 0 でない整数 b を用いて，$\dfrac{a}{b}$ の形で表される数の事をいう．
- **無理数**とは，実数のうち，有理数でない数の事をいう．

注意. 実数の定義に登場した数直線には，原点 O と，もう一つの点 E が定まっており，線分 OE の長さを 1 と定めていることに注意する．点 O と点 E にそれぞれ，数 $0, 1$ を対応させる．原点 O からみて，点 E と同じ側にある点を P とする．線分 OE の長さ 1 を基準とした時，線分 OP の長さが，数直線上の点 P に対応する実数である．これを（すなわち線分 OP の長さを）a とする．原点 O からみて，点 E と反対側にある点であって，点 O からの長さが a である点を Q とするとき，この点 Q に対応する実数を $-a$ とする．このような対応が実数を数直線上に表すという事である．

定義. 実数全体，有理数全体，整数全体，自然数全体の集合をそれぞれ，$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ で表す．

これまでに説明した数をまとめると次のようになる．



例. 小数について，

- **有限小数**とは，0.123 のように，小数部分が有限個である小数の事をいう．すべての有限小数は，$0.1234 = \frac{1234}{10000}$ のように $\frac{(\text{整数})}{(\text{整数})}$ の形で表す事ができるので，有理数である．
- **循環小数**とは，$0.333\cdots$ や，$0.123123\cdots$ のように，小数部分が無限に続く小数であって，その小数部分が規則的に循環している小数の事をいう．これらは，循環する数の上に・印をつけて，それぞれ $0.\dot{3}$ や $0.\dot{1}2\dot{3}$ のように表す．すべての循環小数は，例えば次のようにして $\frac{(\text{整数})}{(\text{整数})}$ の形で表す事ができるので，有理数である．
  $X = 0.\dot{1}2\dot{3}$ とおく．$1000X = 123.\dot{1}2\dot{3}$ なので，
  $$\begin{array}{rrcl} & 1000X & = & 123.123123\cdots \\ -) & X & = & 0.123123\cdots \\ \hline & 999X & = & 123 \end{array}$$
  となり，$X = \frac{123}{999}$ とかける．
- **循環小数しない無限小数**とは，円周率 $\pi = 3.14159\cdots$ や，$\sqrt{2} = 1.14142\cdots$ のように，小数部分が循環せず無限に続く小数の事をいう．循環しない無限小数は，$\frac{(\text{整数})}{(\text{整数})}$ の形で表す事が出来ないので無理数である．

定義. ● 数直線上の点 P に対応している実数を a とする．この a を点 P の**座標**という．

- 点 P の座標が a であるとき，点 P を $\mathrm{P}(a)$ と表す．
- 点 $\mathrm{O}(0)$ と $\mathrm{P}(a)$ の距離を a **の絶対値**といい，$|a|$ と表す．

定義から，$|a| \geqq 0$ であり，次が成り立つ．

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases} \quad \cdots \ a \text{ は負の数なので，} -a > 0 \text{ に注意する．}$$

また，2 点 $\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$ 間の距離は，$|b-a|$ である．

例. $|3| = 3$，$|-2| = -(-2) = 2$ である．
また，2 点 $\mathrm{A}(-4)$，$\mathrm{B}(5)$ 間の距離は，$|5-(-4)| = 9$ である．

定義. a **の平方根**とは，2 乗して a になる数の事をいう．
a の平方根は二つあって，正の方を $\sqrt{a}$，負の方を $-\sqrt{a}$ と表す．記号 $\sqrt{\ }$ を根号という．

定義から次が成り立つ．

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

すなわち，$\sqrt{a^2} = |a|$ である．

平方根の公式

$a > 0,\ b > 0,\ k > 0$ のとき，

1. $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$　　2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$　　3. $\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$

証明. 1. $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2\sqrt{b}^2 = ab > 0$　（定義から明らかに，$\sqrt{a}^2 = a$ である．）
両辺，正の平方根をとると，$\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$ なので求める等式を得る．

2. 1. と同様である．

3. $k > 0$ に注意して，1. を用いると，$\sqrt{k^2 a} = \sqrt{k^2}\sqrt{a} = k\sqrt{a}$ が従う．

□

定義. 分母に根号を含む式を，分母に根号が含まれない式に変形する事を，**分母の有利化**という．

例. $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，　$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$．

2 重根号のはずし方

$\sqrt{p+2\sqrt{q}}$ や，$\sqrt{p-2\sqrt{q}}$ の形の数は，$p = a+b,\ q = ab$ となる正の数 a, b が存在すれば，次のように計算できる．

$$\sqrt{p+2\sqrt{q}} = \sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$\sqrt{p-2\sqrt{q}} = \sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = |\sqrt{a}-\sqrt{b}|$$

例.

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{(3+5)-2\sqrt{3\cdot 5}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-\sqrt{3}$$