漸化式の定義と数学的帰納法

数列 $\{a_n\}$ は，初項 a_1 の値と，隣り合う二項間の関係がわかっていれば，全ての項の値が確定する．例えば，数列 $\{a_n\}$ に対して，

(i) $a_1 = 2$

(ii) $a_{n+1} = 3a_n + 4$

が成り立っているとすると，

$$a_2 = 3a_1 + 4 = 3 \cdot 2 + 4 = 10$$

$$a_3 = 3a_2 + 4 = 3 \cdot 10 + 4 = 34$$

$$a_4 = 3a_3 + 4 = 3 \cdot 34 + 4 = 106$$

$$\vdots$$

のように，順々にして，数列の各項の値を求めることができる．このような定義の仕方を**帰納的に定義する**といい，(ii) のような，a_{n+1} と a_n の関係式を**（隣接二項間）漸化式**という．

数学的帰納法

自然数 n に関する命題 $P(n)$ が，全ての自然数 n に対して成り立つことを示す次のような方法を**数学的帰納法**という．

(i) $n = 1$ の時，$P(1)$ が成り立つことを示す．

(ii) $n = k$ の時，$P(k)$ が成り立つと仮定し，
$n = k + 1$ の時，$P(k + 1)$ が成り立つことを示す．

注意． 上で，数列を帰納的に定義する方法をみたが，同様にして，数学的帰納法の正当性が確認できる．

例． 等式 $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \ell = \frac{1}{2}n(n+1)$ を数学的帰納法を用いて証明してみよう．

(i) $n = 1$ の時，

$$（左辺）= \sum_{\ell=1}^{1} \ell = 1, \qquad （右辺）= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1 \qquad \text{より等式が成り立つ．}$$

(ii) $n = k$ の時，$\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} \ell = \frac{1}{2}k(k+1)$ が成り立つと仮定して，

$n = k + 1$ の時，$\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k+1} \ell = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ が成り立つことを示す．

$$（左辺）= \sum_{\ell=1}^{k+1} \ell = \underline{\underline{\sum_{\ell=1}^{k} \ell}} + (k+1) = \underline{\underline{\frac{1}{2}k(k+1)}} + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = （右辺）$$

仮定を利用

以上より，任意の自然数 n について，等式が成り立つ．