



基本的な数列の漸化式

まずは、等差数列と等比数列¹の一般項と、漸化式²との関係を考察する。

等差数列の漸化式

漸化式 (i) $a_1 = a$

(ii) $a_{n+1} = a_n + d$

で定義される数列 $\{a_n\}$ は、一般項が

$$a_n = a + (n-1)d \quad (1)$$

で表される等差数列である。

等比数列の漸化式

漸化式 (i) $a_1 = a$

(ii) $a_{n+1} = ra_n$

で定義される数列 $\{a_n\}$ は、一般項が

$$a_n = ar^{n-1} \quad (2)$$

で表される等比数列である。

証明. $n = 1$ のときは明らかである.
 $n = k$ のとき, (1) が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + d \\ &= a + (k-1)d + d \\ &= a + kd \end{aligned}$$

となり, $n = k+1$ のときも, (1) が成り立つ.
 よって, 数学的帰納法から, 任意の自然数 n について (1) が成り立つので, (1) は上の漸化式で定義される数列の一般項である. $\square$

補足. 漸化式 (ii) は, $a_{n+1} - a_n = d$ と変形できる.
 これは各項の差が常に d , すなわち「等差」であることを表している。

証明. $n = 1$ のときは明らかである.
 $n = k$ のとき, (2) が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= ra_k \\ &= r \cdot ar^{k-1} \\ &= ar^k \end{aligned}$$

となり, $n = k+1$ のときも, (2) が成り立つ.
 よって, 数学的帰納法から, 任意の自然数 n について (2) が成り立つので, (2) は上の漸化式で定義される数列の一般項である. $\square$

補足. 漸化式 (ii) は, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ と変形できる. これは各項の比が常に r , すなわち「等比」であることを表している。

次に, 階差数列³を考えることが有用な場合の漸化式を紹介する。

階差数列の一般項が $f(n)$ である数列の漸化式

n の関数 $f(n)$ に対して, 漸化式

(i) $a_1 = a$ (ii) $a_{n+1} = a_n + f(n)$

で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は,

$$a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (n \geq 2) \quad (3)$$

と表される. また数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項は,

$$b_n = f(n)$$

である.

証明. 漸化式 (ii) を変形することにより, 階差数列 $\{b_n\}$ の一般項は,

$$b_n = a_{n+1} - a_n = f(n)$$

である. よって, 数列 $\{a_n\}$ の一般項 ($n \geq 2$) は,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= a + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \end{aligned}$$

と表せる. $\square$

¹<https://gleamath.com/arithmetic-geometric-sequences/>

²<https://gleamath.com/definition-of-recurrence-relation/>

³<https://gleamath.com/sequence-of-differences/>