



$a_{n+1} = pa_n + q$ 型の漸化式

$p \neq 0, 1$ とする. 漸化式

$$(i) a_1 = a \quad (ii) a_{n+1} = pa_n + q$$

で定義される数列の一般項を 2 通りの方法で求めよう¹. 解法の根本にあるのは、「既習の漸化式²の形に帰着させる」ということである.

● 特性方程式を用いる方法

定義. 漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ に対して, α の方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を特性方程式という.

漸化式と, その特性方程式の両辺の差を考えると, 等式

$$(a_{n+1} - \alpha) = p(a_n - \alpha)$$

が得られる. ここで, 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_n - \alpha \quad (1)$$

で定義すると, 数列 $\{b_n\}$ の漸化式

$$(i) b_1 = a_1 - \alpha = a - \alpha \quad (ii) b_{n+1} = pb_n$$

が得られる. 漸化式の形から, $\{b_n\}$ は, 初項 $a - \alpha$, 公比 p の等比数列なので, その一般項は,

$$b_n = (a - \alpha)p^{n-1}$$

と表せる. 数列 $\{b_n\}$ の定義式 (1) と合わせて, 数列 $\{a_n\}$ の一般項

$$a_n = (a - \alpha)p^{n-1} + \alpha = ap^{n-1} + \alpha(1 - p^{n-1})$$

が得られる. さらに, 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を解くことで, $\alpha = \frac{q}{1-p}$ が得られるので,

$$a_n = ap^{n-1} + \frac{q(1-p^{n-1})}{1-p}$$

が成り立つ.

● 階差数列を用いる方法

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ の n に $n+1$ を代入することにより, 等式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + q$ が得られる. この 2 つの漸化式の両辺の差を考えると, 等式

$$(a_{n+2} - a_{n+1}) = p(a_{n+1} - a_n)$$

が得られる. ここで, 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (2)$$

で定義すると, 数列 $\{b_n\}$ の漸化式

$$(i) b_1 = a_2 - a_1 = (p-1)a + q \quad (ii) b_{n+1} = pb_n$$

が得られる. 漸化式の形から, $\{b_n\}$ は, 初項 $(p-1)a + q$, 公比 p の等比数列である. さらに, 数列 $\{b_n\}$ はその定義 (2) から, 数列 $\{a_n\}$ の階差数列なので, 数列 $\{a_n\}$ の一般項 ($n \geq 2$) は,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a + \frac{b_1(1-p^{n-1})}{1-p} = a + \frac{\{(p-1)a + q\}(1-p^{n-1})}{1-p} = ap^{n-1} + \frac{q(1-p^{n-1})}{1-p}$$

と表せる. これは, $n = 1$ のときも成り立つ.

¹結果を公式として覚えるのではなく, 解法を理解する方が応用が効く.

²<https://gleamath.com/basic-recurrence-relation/>

参考

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & pa_n + q \\ -) \quad \alpha & = & p\alpha + q \\ \hline (a_{n+1} - \alpha) & = & p(a_n - \alpha) \end{array}$$

参考

$$\begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & pa_{n+1} + q \\ -) \quad a_{n+1} & = & pa_n + q \\ \hline (a_{n+2} - a_{n+1}) & = & p(a_{n+1} - a_n) \end{array}$$