$a_{n+1} = pa_n + q_1 n + q_0$ 型の漸化式

$p \neq 0, 1$ とする．漸化式

(i) $a_1 = a$

(ii) $a_{n+1} = pa_n + q_1 n + q_0$

で定義される数列の一般項を求めよう．$q_1 = 0$ のときは，$a_{n+1} = pa_n + q$ 型の漸化式であるから[1]，$q_1 \neq 0$ とする．数列 $\{a_n\}$ の階差数列が，$a_{n+1} = pa_n + q$ 型の漸化式で定義される数列になるという事実を用いる．

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q_1 n + q_0$ の n に $n+1$ を代入することにより，等式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + q_1(n+1) + q_0$ が得られる．この 2 つの漸化式の両辺の差を考えることにより，等式

$$(a_{n+2} - a_{n+1}) = p(a_{n+1} - a_n) + q_1$$

が得られる．ここで，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n \qquad (2)$$

で定義すると，数列 $\{b_n\}$ の漸化式

(i) $b_1 = a_2 - a_1 = -(1-p)a + q_1 + q_0$

(ii) $b_{n+1} = pb_n + q_1$

参考

$$\begin{array}{rrcrrr} & a_{n+2} & = & pa_{n+1} & + \ q_1(n+1) & + \ q_0 \\ -) & a_{n+1} & = & pa_n & + \ q_1 n & + \ q_0 \\ \hline (a_{n+2} - a_{n+1}) & & = & p(a_{n+1} - a_n) + q_1 & & \end{array}$$

が得られる．よって，$a_{n+1} = pa_n + q$ 型の漸化式の公式 (1) より，数列 $\{b_n\}$ の一般項は，

$$b_n = b_1 p^{n-1} + \frac{q_1(1-p^{n-1})}{1-p}$$

と表せる．後の都合のため，b_n をさらに次のように変形しておく．

$$\begin{aligned} b_n &= \{-(1-p)a + (q_1 + q_0)\} p^{n-1} + \frac{q_1(1-p^{n-1})}{1-p} \\ &= \left\{-(1-p)a + (q_1 + q_0) - \frac{q_1}{1-p}\right\} p^{n-1} + \frac{q_1}{1-p} \qquad (3) \end{aligned}$$

数列 $\{b_n\}$ はその定義 (2) から，数列 $\{a_n\}$ の階差数列なので，$\{a_n\}$ の一般項 $(n \geqq 2)$ は，

$$\begin{aligned} a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} b_k &= a + \left\{-(1-p)a + (q_1 + q_0) - \frac{q_1}{1-p}\right\} \sum_{k=1}^{n-1} p^{n-1} + \frac{q_1}{1-p} \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= a + \left\{-(1-p)a + (q_1 + q_0) - \frac{q_1}{1-p}\right\} \frac{1-p^{n-1}}{1-p} + \frac{q_1(n-1)}{1-p} \\ &= \cdots = ap^{n-1} + \frac{(q_1 n + q_0)(1-p^{n-1})}{1-p} + q_1 \left\{\frac{(n-1)p^{n-1}}{1-p} - \frac{1-p^{n-1}}{(1-p)^2}\right\} \qquad (4) \end{aligned}$$

と計算できる．これは，$n = 1$ のときも成り立つ．

[1] 漸化式 (i) $a_1 = a$, (ii) $a_{n+1} = pa_n + q$ で定義される数列の一般項は，

$$a_n = ap^{n-1} + \frac{q(1-p^{n-1})}{1-p} \qquad (1)$$

と表せるのであった．https://gleamath.com/recurrence-relation03/

さらに，(4) 式の最後の項については，$n \geqq 2$ に対して，次の補題が成り立つ．

補題. $n \geqq 2$ とする．次が成り立つ．

$$\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{1-p^{n-1}}{(1-p)^2} - \frac{(n-1)p^{n-1}}{1-p}$$

証明. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} kp^k$ は，次のように計算できる．

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} & = & 1 & + & 2p & + & 3p^2 & + & \cdots & + & (n-1)p^{n-2} & & \\
-) \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k} & = & & & p & + & 2p^2 & + & \cdots & + & (n-2)p^{n-2} & + & (n-1)p^{n-1} \\
\hline
(1-p)\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} & = & 1 & + & p & + & p^2 & + & \cdots & + & p^{n-2} & - & (n-1)p^{n-1}
\end{array}$$

よって，

$$\begin{aligned}
(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} p^{k-1} - (n-1)p^{n-1} \\
&= \frac{1-p^{n-1}}{1-p} - (n-1)p^{n-1}
\end{aligned}$$

となり，両辺を $1-p$ で割ることにより，結果が従う． □

補題と (4) 式から，冒頭の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = ap^{n-1} + \frac{(q_1 n + q_0)(1-p^{n-1})}{1-p} - q_1 \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} \tag{5}$$

と表せる（ただし，$n \geqq 2$）．

注意. 冒頭で述べたように，$a_{n+1} = pa_n + q_1 n + q_0$ 型の漸化式で定義される数列は，その階差数列が，$a_{n+1} = pa_n + q$ 型の漸化式で定義される数列になるという点が大切である．さらに，$a_{n+1} = pa_n + q$ 型の漸化式で定義される数列は，その階差数列が等比数列になるという事実から，その一般項を求めていたのであった．以上の考察から，$a_{n+1} = pa_n + q_1 n + q_0$ 型の漸化式で定義される数列は，二階階差数列[2]が，等比数列になることがわかる．

帰納的に考えることにより，一般的には，$f(n)$ を n の d 次多項式としたとき，$a_{n+1} = pa_n + f(n)$ 型の漸化式で定義される数列は，$d-1$ 階階差数列が等比数列となることがわかる．一般の場合に，(5) のような一般項の表記を求めることは容易でないが，是非とも試みていただきたい．結果は次のようになる[3]：

$$a_n = ap^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} f(n-k)p^{k-1}.$$

[2]階差数列の階差数列ということ．

[3]詳細は，https://gleamath.com/recurrence-relation05/ を参照．