$a_{n+1} = pa_n + f(n)$ 型の漸化式

命題. $f(n)$ を n の d 次多項式

$$f(n) = \sum_{k=0}^{d} q_k n^k = q_d n^d + \cdots + q_1 n + q_0$$

とする．$p \neq 0, 1$ とする．漸化式

$$\text{(i)}\ a_1 = a, \qquad \text{(ii)}\ a_{n+1} = pa_n + f(n)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = ap^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} f(n-k)p^{k-1} \qquad (n \geqq 2)$$

と表される．

証明の前に，いくつか言葉と記号を定義する．

定義.

- 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，

$$g(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_k x^{k-1} + \cdots \tag{1}$$

を，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の（通常型）**母関数**[1]という．

- 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の母関数 $g(x)$ に対して，m 次以上の項をまとめて，$O(x^m)$ と表す[2]．この記法により，$g(x)$ は，次のように表せる：

$$g(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k x^{k-1} + O(x^m).$$

注意. 数列 $\{a_n\}$ の母関数 $g(x)$ の定義から，$g(x)$ が求まれば，その $n-1$ 次の項の係数を見ることにより，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n が求まる．しかし，$\{a_n\}$ の一般項を求めるだけであれば，$g(x)$ そのものの値は特に問題にせず，$n-1$ 次の係数だけを確定させれば良い．

例えば，$|x| < \frac{1}{p}$ のとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(px)^{k-1} = 1 + px + (px)^2 + \cdots$ は収束し，その値は，

$$\sum_{k=1}^{\infty}(px)^{k-1} = \frac{1}{1-px}$$

と書けるのであった．これは上の記号を用いて，

$$\sum_{k=1}^{m}(px)^{k-1} + O(x^m) = \frac{1}{1-px} \tag{2}$$

と表せる．以下の証明においても，m は n より十分大きい数として，x を適当に設定することにより，(2) の等式を形式的に用いる[3]．

---

[1] 関数と言っているが，形式的冪級数のことである．

[2] ランダウの記号と呼ばれる．

[3] x の値は，母関数の係数 a_n には影響を及ぼさないので，このような計算を用いても問題はない．

証明．m は $n \geqq 2$ より十分大きい自然数とする．数列 $\{a_n\}$ の母関数を $g(x)$ とする．

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
g(x) & = & a_1 & + & a_2x & + & a_3x^2 & +\cdots+ & a_mx^{m-1} & + & O(x^m) \\
-pxg(x) & = & & - & pa_1x & - & pa_2x^2 & -\cdots- & pa_{m-1}x^{m-1} & + & O(x^m) \\
-\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} f(k)x^k & = & & - & f(1)x & - & f(2)x^2 & -\cdots- & f(m-1)x^{m-1} & &
\end{array}
$$

の辺々の和をとることにより，等式

$$(1-px)g(x) - \sum_{k=1}^{m-1} f(k)x^k = a + O(x^m)$$

を得る．上の注意で述べた等式 (2) を用いることにより，母関数 $g(x)$ は，

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{1-px}\left\{a + \sum_{k=1}^{m-1} f(k)x^k + O(x^m)\right\} \\
&= \left\{\sum_{k=1}^{m}(px)^{k-1} + O(x^m)\right\}\left\{a + \sum_{k=1}^{m-1} f(k)x^k + O(x^m)\right\} \\
&= a\sum_{k=1}^{m}(px)^{k-1} + \left\{\sum_{k=1}^{m}(px)^{k-1}\right\}\left\{\sum_{k=1}^{m-1} f(k)x^k\right\} + O(x^m) \\
&= \sum_{k=1}^{m} ap^{k-1}x^{k-1} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1} f(j)p^{i-1}x^{i+j-1} + O(x^m)
\end{aligned}
$$

と計算できる．この表記から，$g(x)$ の $n-1$ 次の係数 a_n は，

$$
\begin{aligned}
a_n &= ap^{n-1} + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geqq 1}} f(j)p^{i-1} \\
&= ap^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} f(n-k)p^{k-1}
\end{aligned}
$$

であり，これが求める一般項である． □

例．$f(n)$ が定数 q である場合の一般項は，

$$a_n = ap^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} qp^{k-1} = ap^{n-1} + \frac{q(1-p^{n-1})}{1-p}$$

と計算できる[4]．また，$f(n) = q_1n + q_0$ である場合の一般項は，

$$a_n = ap^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}\{q_1(n-k)+q_0\}p^{k-1} = ap^{n-1} + \frac{f(n)(1-p^{n-1})}{1-p} - q_1\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1}$$

と計算できる[5]．

[4] これは，https://gleamath.com/recurrence-relation03/ で求めた結果と一致している．
[5] これは，https://gleamath.com/recurrence-relation04/ で求めた結果と一致している．