$a_{n+1} = pa_n + q^n$ 型の漸化式

$p \neq 0, 1,\ q \neq 0$ とする．漸化式

(i) $a_1 = a$

(ii) $a_{n+1} = pa_n + q^n$

で定義される数列の一般項を求めよう．$q = 0$ なら，数列 $\{a_n\}$ は単に等比数列なので，$q \neq 0$ としている．漸化式 (ii) の両辺を q^{n+1} で割ることにより，等式

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{pa_n}{q^{n+1}} + \frac{1}{q} \tag{1}$$

が得られる．ここで，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_n}{q^n} \tag{2}$$

で定義すると，等式 (1) は，

$$b_{n+1} = \frac{p}{q} b_n + \frac{1}{q} \tag{3}$$

と書ける．$p = q$ なら，数列 $\{b_n\}$ は，単に等差数列なので，その一般項は，

$$b_n = b_1 + \frac{n-1}{q} = \frac{a}{q} + \frac{n-1}{q}$$

である．よって，数列 $\{b_n\}$ の定義式 (2) から，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = q^n b_n = q^{n-1}(a + n - 1) = p^{n-1}(a + n - 1)$$

と表せる．

$p \neq q$ なら，数列 $\{b_n\}$ は，「$a_{n+1} = pa_n + q$ 型」の漸化式[1] で定義される数列である．このとき，注釈の公式 (4) を用いて，$\{b_n\}$ の一般項は，

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \frac{\frac{1}{q}\left\{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \frac{p}{q}} \\ &= \frac{ap^{n-1}}{q^n} + \frac{q^{n-1} - p^{n-1}}{q^{n-1}(q-p)} \\ &= \frac{1}{q^n}\left\{ap^{n-1} + \frac{q(q^{n-1} - p^{n-1})}{q - p}\right\} \end{aligned}$$

と表せる．最後に，数列 $\{b_n\}$ の定義式 (2) から，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = q^n \cdot b_n = ap^{n-1} + \frac{q(q^{n-1} - p^{n-1})}{q - p} \tag{5}$$

と計算できる．

補足. 漸化式 (ii) $a_{n+1} = pa_n + q^n$ は，$q = 1$ なら，$a_{n+1} = pa_n + 1$ となり，単に「$a_{n+1} = pa_n + q$ 型」の漸化式である．このことは，一般項 (5) に $q = 1$ を代入すると，注釈の公式 (4) に $q = 1$ を代入したものが得られることからも確認できる．

---

[1]漸化式 (i) $a_1 = a$，(ii) $a_{n+1} = pa_n + q$ $(p \neq 1)$ で定義される数列の一般項は，

$$a_n = ap^{n-1} + \frac{q(1 - p^{n-1})}{1 - p} \tag{4}$$

と表せるのであった．https://gleamath.com/recurrence-relation03/