$a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$ 型の漸化式

命題. $f(n)$, $g(n)$ を n の関数とし，任意の $n \geqq 1$ に対して，$f(n) \neq 0$ であるとする．漸化式

$$\text{(i)}\ a_1=a, \qquad \text{(ii)}\ a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = a\prod_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{f(n)}\sum_{l=2}^{n} g(l-1)\prod_{k=l}^{n} f(k) \qquad (n \geqq 2) \tag{1}$$

と表せる．

証明の前に，上の命題の特別な場合をまとめておく．

系 1. 上の命題の状況で，$g(n)=q$ が定数であるとき，すなわち，漸化式

$$\text{(i)}\ a_1=a, \qquad \text{(ii)}\ a_{n+1}=f(n)a_n+q$$

で定義される数列を $\{a_n\}$ とするとき，その一般項は，

$$a_n = a\prod_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{q}{f(n)}\sum_{l=2}^{n}\prod_{k=l}^{n} f(k) \qquad (n \geqq 2) \tag{2}$$

と表せる．

系 2. 上の命題の状況で，$a_1=a=g(0)$ であるとき，すなわち，漸化式

$$\text{(i)}\ a_1=g(0), \qquad \text{(ii)}\ a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$$

で定義される数列を $\{a_n\}$ とするとき，その一般項は，

$$a_n = \frac{1}{f(n)}\sum_{l=1}^{n} g(l-1)\prod_{k=l}^{n} f(k) \tag{3}$$

と表せる．これは $n \geqq 1$ に対して成り立つ．）

系 3. 上の命題の状況で，$g(n)=q$ であり，$a_1=a=q$ であるとき，すなわち，漸化式

$$\text{(i)}\ a_1=q, \qquad \text{(ii)}\ a_{n+1}=f(n)a_n+q$$

で定義される数列を $\{a_n\}$ とするとき，その一般項は，

$$a_n = \frac{q}{f(n)}\sum_{l=1}^{n}\prod_{k=l}^{n} f(k) \tag{4}$$

と表せる．（これは $n \geqq 1$ に対して成り立つ．）

命題の証明．$n \geqq 1$ に対して，

$$F(n) = \prod_{k=1}^{n} f(k)$$

とおくと，仮定から $F(n) \neq 0$ である．漸化式 (ii) の両辺を $F(n)$ で割ることにより，等式

$$\frac{a_{n+1}}{F(n)} = \frac{f(n)a_n}{F(n)} + \frac{g(n)}{F(n)}$$

を得る．これから，$n \geqq 2$ に対して，

$$\frac{a_{n+1}}{F(n)} = \frac{a_n}{F(n-1)} + \frac{g(n)}{F(n)} \tag{5}$$

が成り立つ．ここで，$n \geqq 2$ に対して，数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ をそれぞれ

$$b_n = \frac{a_n}{F(n-1)}, \qquad c_n = b_{n+1} - b_n$$

で定義すると，(5) から，

$$c_n = \frac{g(n)}{F(n)}$$

が成り立つ．$\{c_n\}$ は，数列 $\{b_n\}$ の階差数列なので，一般項の公式から，$n \geqq 3$ に対して，

$$b_n = b_2 + \sum_{l=2}^{n-1} c_l = \frac{a_2}{F(1)} + \sum_{l=2}^{n-1} \frac{g(l)}{F(l)} = a + \frac{g(1)}{f(1)} + \sum_{l=2}^{n-1} \frac{g(l)}{F(l)} = a + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{g(l)}{F(l)}$$

であるが，最後の式は，$n = 2$ に対しても成り立つ．$\{b_n\}$ の定義式から，$\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = F(n-1)b_n = aF(n-1) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{F(n-1)}{F(l)} g(l)$$

と計算できる．さらに，$n-1 \geqq l$ に対して，

$$\frac{F(n-1)}{F(l)} = \frac{1}{f(n)} \cdot \frac{F(n)}{F(l)} = \frac{1}{f(n)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n} f(k)}{\prod_{k=1}^{l} f(k)} = \frac{1}{f(n)} \prod_{k=l+1}^{n} f(k)$$

が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned} a_n &= aF(n-1) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{f(n)} \prod_{k=l+1}^{n} f(k)g(l) \\ &= aF(n-1) + \frac{1}{f(n)} \sum_{l=1}^{n-1} g(l) \prod_{k=l+1}^{n} f(k) \\ &= aF(n-1) + \frac{1}{f(n)} \sum_{l=2}^{n} g(l-1) \prod_{k=l}^{n} f(k) \end{aligned}$$

と計算できる．これが求める一般項である． □