$a_{n+1} = pa_n^q$ 型の漸化式

$q \neq 0, 1$ とする．漸化式

(i) $a_1 = a$

(ii) $a_{n+1} = pa_n^q$

で定義される数列の一般項を求めよう．ただし，任意の $n \geqq 1$ に対して，$a_n > 0$ を仮定する．$q = 0, 1$ なら，数列 $\{a_n\}$ は単に等比数列である．

r を 1 でない正の実数とする．漸化式 (ii) の両辺の r を底とする対数を取ることにより，等式

$$\log_r a_{n+1} = \log_r pa_n^q = \log_r p + q \log_r a_n \tag{1}$$

が得られる．ここで，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \log_r a_n \tag{2}$$

で定義すると，等式 (1) は，

$$b_{n+1} = qb_n + \log_r p \tag{3}$$

と書ける．$q \neq 1$ なので，数列 $\{b_n\}$ は，「$a_{n+1} = pa_n + q$ 型」の漸化式[1] で定義される数列である．注釈の公式 (4) を用いて，$\{b_n\}$ の一般項は，

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 q^{n-1} + \frac{\log_r p(1 - q^{n-1})}{1 - q} \\ &= q^{n-1} \log_r a + \frac{\log_r p(1 - q^{n-1})}{1 - q} \end{aligned}$$

と表せる．数列 $\{b_n\}$ の定義式 (2) から，

$$a_n = r^{b_n}$$

であることに注意すると，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$\begin{aligned} a_n &= r^{q^{n-1} \log_r a} \cdot r^{\frac{\log_r p(1-q^{n-1})}{1-q}} \\ &= a^{q^{n-1}} \cdot p^{\frac{1-q^{n-1}}{1-q}} \end{aligned} \tag{5}$$

と計算できる．

注意.

- $p \neq 1$ の場合は，上の解法において，$r = p$ として計算することができる．この場合，$\log_r p = 1$ なので，比較的計算が楽に行える．
- 実際の計算では，「任意の $n \geqq 1$ に対して，$a_n > 0$ である」という仮定部分の確認が必要である．これは数学的帰納法などを用いて示すことができる．

---

[1] 漸化式 (i) $a_1 = a$, (ii) $a_{n+1} = pa_n + q$ $(p \neq 1)$ で定義される数列の一般項は，

$$a_n = ap^{n-1} + \frac{q(1 - p^{n-1})}{1 - p} \tag{4}$$

と表せるのであった．https://gleamath.com/recurrence-relation03/