$a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$ 型の漸化式

$p, r \neq 0$ とする．漸化式

(i) $a_1=a$

(ii) $a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$

で定義される数列の一般項を求めよう．$p=0$ なら，これは単に等差数列であり，$r=0$ なら，定数列である．また，$a=0$ なら，この場合も定数列となるため，$a \neq 0$ も仮定する．これにより，任意の自然数 n に対して，$a_n \neq 0$ である．

漸化式 (ii) の逆数を取ることで，等式

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{pa_n+q}{ra_n}=\frac{p}{r}+\frac{q}{ra_n} \tag{1}$$

を得る．ここで，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ で定めると，等式 (1) は，

$$b_{n+1}=\frac{q}{r}b_n+\frac{p}{r} \tag{2}$$

と書ける．

$q=r$ なら，これは単に等差数列であるから，その一般項は，

$$b_n=b_1+\frac{p(n-1)}{r}=\frac{1}{a}+\frac{p(n-1)}{r}=\frac{r+ap(n-1)}{ar}$$

であり，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{ar}{r+ap(n-1)}=\frac{aq}{q+ap(n-1)} \tag{3}$$

と求められる．

$q \neq r$ なら，(2) は，「$a_{n+1}=pa_n+q$ 型」の漸化式[1] なので，数列 $\{b_n\}$ の一般項は，

$$b_n=b_1\left(\frac{q}{r}\right)^{n-1}+\frac{\frac{p}{r}\left\{1-\left(\frac{q}{r}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{q}{r}}=\frac{1}{r^{n-1}}\left\{\frac{q^{n-1}}{a}+\frac{p(r^{n-1}-q^{n-1})}{r-q}\right\}$$

であり，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$\begin{aligned}a_n=\frac{1}{b_n}&=r^{n-1}\frac{a(r-q)}{(r-q)q^{n-1}+ap(r^{n-1}-q^{n-1})}\\&=\frac{ar^{n-1}(r-q)}{(r-q)q^{n-1}+ap(r^{n-1}-q^{n-1})}\end{aligned}$$

と求められる．

[1] https://gleamath.com/recurrence-relation03/