$a_{n+1} = \dfrac{ra_n + s}{pa_n + q}$ 型の漸化式

漸化式

(i) $a_1 = a$ (ii) $a_{n+1} = \dfrac{ra_n + s}{pa_n + q}$

で定義される数列の一般項を求めよう．

- $s = 0$ なら，これは，「$a_{n+1} = \frac{ra_n}{pa_n+q}$ 型」の漸化式[1]である．
- $p = 0$ なら，これは，「$a_{n+1} = pa_n + q$ 型」の漸化式[2]であり，
- $p : q = r : s$，すなわち，$ps = qr$ なら，数列 $\{a_n\}$ は定数列である．

よって，以下では，$s \neq 0$ $p \neq 0$, $ps \neq qr$ を仮定する．

特性方程式

$$x = \frac{rx + s}{px + q} \tag{1}$$

の解を α, β とすると，漸化式 (ii) から，

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{ra_n + s}{pa_n + q} - \alpha = \frac{(r - p\alpha)a_n + (s - q\alpha)}{pa_n + q} \tag{2}$$

と計算できる．ここで，α は特性方程式 (1) の解であることから，

$$\alpha = \frac{r\alpha + s}{p\alpha + q} \iff s - q\alpha = \alpha(p\alpha - r) \tag{3}$$

が成り立つ[3]ので，(2) と合わせて，等式

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{r - p\alpha}{pa_n + q}(a_n - \alpha) \tag{4}$$

が得られる．ここで，$r - p\alpha \neq 0$ であることに注意しておく．なぜならば，$\alpha = \dfrac{r}{p}$ を仮定すると，(3) から，$\alpha = \dfrac{s}{q} = \dfrac{r}{p}$ が従うが，これは，$ps \neq qr$ という仮定に矛盾するからである．

◦ $\alpha \neq \beta$ のとき，等式 (4) は，特性方程式のもうひとつの解 β についても成り立つので，

$$\frac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} = \frac{r - p\alpha}{r - p\beta} \cdot \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$$

が成り立つ．数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \dfrac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$ で定めると，上の等式は，

$$b_{n+1} = \frac{r - p\alpha}{r - p\beta} \cdot b_n$$

[1] https://gleamath.com/recurrence-relation09/ を参照．
[2] https://gleamath.com/recurrence-relation03/ を参照．ただし，$p = 0$, $q = r$ の時は，単に等差数列である．
[3] $ps \neq qr$ を仮定している．

と書ける．これは，単に等比数列なので，その一般項は，

$$b_n = b_1 \cdot \left(\frac{r-p\alpha}{r-p\beta}\right)^{n-1} = \frac{a-\alpha}{a-\beta} \cdot \left(\frac{r-p\alpha}{r-p\beta}\right)^{n-1}$$

と表せる．数列 $\{b_n\}$ の定義式と合わせて，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = \frac{\beta b_n - \alpha}{b_n - 1} = \frac{\beta(a-\alpha)(r-p\alpha)^{n-1} - \alpha(a-\beta)(r-p\beta)^{n-1}}{(a-\alpha)(r-p\alpha)^{n-1} - (a-\beta)(r-p\beta)^{n-1}}$$

と表せる．

○ $\alpha = \beta$ のとき，等式 (4) の両辺の逆数を取ることにより，等式

$$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha} = \frac{pa_n + q}{r-p\alpha} \cdot \frac{1}{a_n - \alpha} = \frac{1}{r-p\alpha}\left(\frac{pa_n}{a_n-\alpha} + \frac{q}{a_n-\alpha}\right) \tag{5}$$

が得られる．ここで，$\alpha = \beta$ は，特性方程式 (1)，すなわち，二次方程式 $px^2+(q-r)x-s=0$ の重解なので，解と係数の関係から，

$$2p\alpha = r - q \iff p\alpha + q = -p\alpha + r \tag{6}$$

が成り立つ．このことに注意すると，等式 (5) は，

$$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha} = \frac{1}{r-p\alpha}\left(\frac{pa_n - p\alpha}{a_n-\alpha} + \frac{p\alpha+q}{a_n-\alpha}\right) = \frac{p}{r-p\alpha} + \frac{1}{a_n-\alpha}$$

と計算できる．数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \dfrac{1}{a_n-\alpha}$ で定めると，上の等式は，

$$b_{n+1} = b_n + \frac{p}{r-p\alpha}$$

と書ける．これは単に等差数列なので，その一般項は，

$$b_n = b_1 + \frac{p(n-1)}{r-p\alpha} = \frac{1}{a-\alpha} + \frac{p(n-1)}{r-p\alpha}$$

と表せる．ここで，解と係数の関係 (6) から，

$$r - p\alpha = r - p\frac{r-q}{2p} = \frac{q+r}{2}$$

が成り立つので，

$$b_n = \frac{1}{a-\alpha} + \frac{2p(n-1)}{q+r} = \frac{(q+r) + 2p(n-1)(a-\alpha)}{(a-\alpha)(q+r)}$$

と計算できる．数列 $\{b_n\}$ の定義式と合わせて，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{b_n} + \alpha \\
&= \frac{(a-\alpha)(q+r)}{(q+r)+2p(n-1)(a-\alpha)} + \alpha \\
&= \frac{(a-\alpha)(q+r) + \alpha(q+r) + 2p\alpha(n-1)(a-\alpha)}{(q+r)+2p(n-1)(a-\alpha)} \\
&= \frac{a(q+r) + 2p\alpha(n-1)(a-\alpha)}{(q+r)+2p(n-1)(a-\alpha)}
\end{aligned}$$

と表せる．