隣接３項間漸化式

漸化式

(i) $a_1 = a, \quad a_2 = b$ (ii) $pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$

で定義される数列の一般項を求めよう．

特性方程式

$$px^2 + qx + r = 0 \tag{1}$$

の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係から，

$$\alpha + \beta = -\frac{q}{p}, \qquad \alpha\beta = \frac{r}{p}$$

が成り立つ．これを用いて，漸化式 (ii) は，

$$a_{n+2} + \frac{q}{p}a_{n+1} + \frac{r}{p}a_n = 0$$
$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0 \tag{2}$$
$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \tag{3}$$

と変形できる．ここで，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$$

で定めると，上の等式 (3) は，

$$b_{n+1} = \beta b_n$$

と書ける．数列 $\{b_n\}$ は公比 β の等比数列なので，その一般項は，

$$b_n = b_1\beta^{n-1} = (b - a\alpha)\beta^{n-1} \tag{4}$$

と計算できる．

- $\alpha \neq \beta$ のとき，等式 (2) における α, β の対称性から，漸化式 (ii) は，

  $$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

  と変形することもできる．上と同様に，数列 $\{b'_n\}$ を，$b'_n = a_{n+1} - \beta a_n$ で定めると，これは公比 α の等比数列なので，一般項は，

  $$b'_n = b'_1\alpha^{n-1} = (b - a\beta)\alpha^{n-1} \tag{5}$$

  と計算できる．

  等式 (4),(5) から，得られる連立方程式

  $$\begin{cases} a_{n+1} - \alpha a_n &= (b - a\alpha)\beta^{n-1} \\ a_{n+1} - \beta a_n &= (b - a\beta)\alpha^{n-1} \end{cases}$$

  を解くことで，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

  $$a_n = \frac{(b - a\alpha)\beta^{n-1} - (b - a\beta)\alpha^{n-1}}{\beta - \alpha} \tag{6}$$

  と表せる．

- $\alpha = \beta$ のとき，等式 (4) から，

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha a_n &= (b - a\alpha)\alpha^{n-1} \\ a_{n+1} &= \alpha a_n + (b - a\alpha)\alpha^{n-1} \end{aligned}$$

が成り立つ．これの両辺を α^{n+1} で割ることにより，等式

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} = \frac{a_n}{\alpha^n} + \frac{b - a\alpha}{\alpha^2} \tag{7}$$

が得られる．ここで，数列 $\{c_n\}$ を，

$$c_n = \frac{a_n}{\alpha^n}$$

で定めると，等式 (7) は，

$$c_{n+1} = c_n + \frac{b - a\alpha}{\alpha^2}$$

と書ける．これは，等差数列なので，一般項は，

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \frac{(n-1)(b - a\alpha)}{\alpha^2} \\ &= \frac{a_1}{\alpha} + \frac{(n-1)(b - a\alpha)}{\alpha^2} \\ &= \frac{a\alpha + (n-1)(b - a\alpha)}{\alpha^2} \end{aligned} \tag{8}$$

と表せる．数列 $\{c_n\}$ の定義式から，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha^n c_n \\ &= a\alpha^{n-1} + (n-1)(b - a\alpha)\alpha^{n-2} \end{aligned} \tag{9}$$

と表せる．

補足. 特性方程式が 1 を解に持つ場合は，次のように階差数列の概念を用いることができる．上の記号をそのまま用いる．

- $\alpha = 1 \neq \beta$ のとき，等式 (3) は，

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - a_n)$$

と表せる．$b_n = a_{n+1} - a_n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項は，(4) と同様に，$b_n = (b - a)\beta^{n-1}$ と表せるので，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$n \geq 2$ に対して，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a + (b - a)\sum_{k=1}^{n-1} \beta^{k-1} = a + (b - a)\frac{\beta^{n-1} - 1}{\beta - 1}$$

と表せる．これは，$n = 1$ の時も成り立ち，$\alpha \neq \beta$ の場合の一般項 (6) に $\alpha = 1$ を代入した式と同値である．

- $\alpha = \beta = 1$ のとき，等式 (3) は，

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$$

と表せる．$a_2 - a_1 = b - a$ なので，この漸化式は，数列 $\{a_n\}$ が初項 a，公差 $b - a$ の等差数列であることを表している．よって，その一般項は，

$$a_n = a + (n-1)(b - a)$$

であり，これは $\alpha = \beta$ の場合の一般項 (9) に $\alpha = 1$ を代入した式と同値である．