隣接４項間漸化式

漸化式

(i) $a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = c$ (ii) $pa_{n+3} + qa_{n+2} + ra_{n+1} + sa_n = 0$

で定義される数列の一般項を求めよう．

特性方程式

$$px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \tag{1}$$

の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると，解と係数の関係から，

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{q}{p}, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{r}{p}, \qquad \alpha\beta\gamma = -\frac{s}{p}$$

が成り立つ．これを用いて，漸化式 (ii) は，

$$a_{n+3} + \frac{q}{p}a_{n+2} + \frac{r}{p}a_{n+1} + \frac{s}{p}a_n = 0$$

$$a_{n+3} - (\alpha + \beta + \gamma)a_{n+2} + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)a_{n+1} - \alpha\beta\gamma a_n = 0 \tag{2}$$

$$a_{n+3} - \alpha a_{n+2} - (\beta + \gamma)(a_{n+2} - \alpha a_{n+1}) + \beta\gamma(a_{n+1} - \alpha a_n) = 0 \tag{3}$$

と変形できる．ここで，数列 $\{b_{\alpha,n}\}$ を

$$b_{\alpha,n} = a_{n+1} - \alpha a_n$$

で定めると，上の等式 (3) は，

$$b_{\alpha,n+2} - (\beta + \gamma)b_{\alpha,n+1} + \beta\gamma b_{\alpha,n} = 0 \tag{4}$$

$$b_{\alpha,n+2} - \beta b_{\alpha,n+1} = \gamma(b_{\alpha,n+1} - \beta b_{\alpha,n}) \tag{5}$$

と書ける．さらに，数列 $\{c_{\alpha,\beta,n}\}$ を

$$c_{\alpha,\beta,n} = b_{\alpha,n+1} - \beta b_{\alpha,n}$$

で定めると，上の等式 (5) は，

$$c_{\alpha,\beta,n+1} = \gamma c_{\alpha,\beta,n}$$

と書ける．数列 $\{c_{\alpha,\beta,n}\}$ は公比 γ の等比数列なので，その一般項は，

$$\begin{aligned} c_{\alpha,\beta,n} &= c_{\alpha,\beta,1} \cdot \gamma^{n-1} \\ &= (b_{\alpha,2} - \beta b_{\alpha,1})\gamma^{n-1} \\ &= \{(a_3 - \alpha a_2) - \beta(a_2 - \alpha a_1)\}\gamma^{n-1} \\ &= \{c - (\alpha + \beta)b + \alpha\beta a\}\gamma^{n-1} \end{aligned} \tag{6}$$

と計算できる．また，等式 (4) における $\beta,\ \gamma$ の対称性から，数列 $\{c_{\alpha,\gamma,n}\}$ を，$c_{\alpha,\gamma,n} = b_{\alpha,n+1} - \gamma b_{\alpha,n}$ で定めると，上と同様の議論により，その一般項は，

$$c_{\alpha,\gamma,n} = \{c - (\alpha + \gamma)b + \alpha\gamma a\}\beta^{n-1} \tag{7}$$

と計算できる．等式 (2) における $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の対称性から，数列 $\{b_{\beta,n}\}$ を，$b_{\beta,n} = a_{n+1} - \beta a_n$ で定め，それに応じて，数列 $\{c_{\beta,\alpha,n}\}$，$\{c_{\beta,\gamma,n}\}$ を，$c_{\beta,\alpha,n} = b_{\beta,n+1} - \alpha b_{\beta,n}$，$c_{\beta,\gamma,n} = b_{\beta,n+1} - \gamma b_{\beta,n}$ と定める．これまでと同様の議論を繰り返すことにより，数列 $\{c_{\beta,\alpha,n}\}$，$\{c_{\beta,\gamma,n}\}$ の一般項はそれぞれ，

$$c_{\beta,\alpha,n} = \{c - (\beta + \alpha)b + \beta\alpha a\}\gamma^{n-1} \tag{8}$$

$$c_{\beta,\gamma,n} = \{c - (\beta + \gamma)b + \beta\gamma a\}\alpha^{n-1} \tag{9}$$

と表せる．ここで，(6),(8) から，$c_{\alpha,\beta,n} = c_{\beta,\alpha,n}$ であることに注意しておく．

以下，簡単のため，$\delta_1, \delta_2 \in \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ に対して，

$$f(\delta_1, \delta_2) := c - (\delta_1 + \delta_2)b + \delta_1\delta_2 a$$

とおく．明らかに，$f(\delta_1, \delta_2) = f(\delta_2, \delta_1)$ である．

- α, β, γ が相異なる場合，等式 (6),(7) から得られる連立方程式

$$\begin{cases} b_{\alpha,n+1}-\beta b_{\alpha,n} &= f(\alpha,\beta)\gamma^{n-1} \\ b_{\alpha,n+1}-\gamma b_{\alpha,n} &= f(\alpha,\gamma)\beta^{n-1} \end{cases}$$

を解くことで，数列 $\{b_{\alpha,n}\}$ の一般項は，

$$b_{\alpha,n}=\frac{f(\alpha,\beta)\gamma^{n-1}-f(\alpha,\gamma)\beta^{n-1}}{\gamma-\beta} \tag{10}$$

と表せる．同様に，等式 (8),(9) から得られる連立方程式を解くことで，数列 $\{b_{\beta,n}\}$ の一般項は，

$$b_{\beta,n}=\frac{f(\beta,\alpha)\gamma^{n-1}-f(\beta,\gamma)\alpha^{n-1}}{\gamma-\alpha} \tag{11}$$

と表せる．最後に，(10),(11) から得られる連立方程式を解くことで，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)a_n &= \frac{f(\alpha,\beta)\gamma^{n-1}-f(\alpha,\gamma)\beta^{n-1}}{\gamma-\beta}-\frac{f(\beta,\alpha)\gamma^{n-1}-f(\beta,\gamma)\alpha^{n-1}}{\gamma-\alpha} \\ a_n &= -\frac{(\alpha-\beta)f(\alpha,\beta)\gamma^{n-1}+(\beta-\gamma)f(\beta,\gamma)\alpha^{n-1}+(\gamma-\alpha)f(\gamma,\alpha)\beta^{n-1}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)} \\ &= \frac{f(\beta,\gamma)\alpha^{n-1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{f(\alpha,\gamma)\beta^{n-1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{f(\alpha,\beta)\gamma^{n-1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\end{aligned}$$

と表せる．

- $\alpha=\beta\neq\gamma$ の場合，$b_{\alpha,n}=a_{n+1}-\alpha a_n$ と等式 (10) から，$\alpha=\beta$ であることに注意すると，

$$a_{n+1}=\alpha a_n+\frac{f(\alpha,\alpha)\gamma^{n-1}-f(\alpha,\gamma)\alpha^{n-1}}{\gamma-\alpha}$$

が成り立つ．この両辺を α^{n+1} で割ることによって，数列 $\left\{\frac{a_n}{\alpha^n}\right\}$ の漸化式が得られるが，その形から，$\left\{\frac{a_n}{\alpha^n}\right\}$ は，等差数列である．よって，一般項は，

$$\frac{a_n}{\alpha^n}=\frac{a_1}{\alpha}+\frac{(n-1)\{f(\alpha,\alpha)\gamma^{n-1}-f(\alpha,\gamma)\alpha^{n-1}\}}{\alpha^{n+1}(\gamma-\alpha)}$$

と表せる．したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，次のように表せる:

$$a_n=a\alpha^{n-1}+\frac{(n-1)\{f(\alpha,\alpha)\gamma^{n-1}-f(\alpha,\gamma)\alpha^{n-1}\}}{\alpha(\gamma-\alpha)}.$$

- $\alpha=\beta=\gamma$ の場合，$c_{\alpha,\beta,n}=b_{\alpha,n+1}-\beta b_{\alpha,n}$ と等式 (6) から，$\alpha=\beta=\gamma$ であることに注意すると，

$$b_{\alpha,n+1}-\alpha b_{\alpha,n}=f(\alpha,\alpha)\alpha^{n-1}$$

が成り立つ．この両辺を α^{n+1} で割ることによって，数列 $\left\{\frac{b_{\alpha,n}}{\alpha^n}\right\}$ の漸化式が得られるが，その形から，$\left\{\frac{b_{\alpha,n}}{\alpha^n}\right\}$ は，等差数列なので，一般項は，$\frac{b_{\alpha,n}}{\alpha^n}=\frac{b_{\alpha,1}}{\alpha}+\frac{(n-1)f(\alpha,\alpha)}{\alpha^2}$ と表せる．$b_{\alpha,n}=a_{n+1}-\alpha a_n$ より，

$$\frac{a_{n+1}-\alpha a_n}{\alpha^n}=\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha}+\frac{(n-1)f(\alpha,\alpha)}{\alpha^2}$$

が成り立つ．さらに，この両辺を α で割ることによって，数列 $\left\{\frac{a_n}{\alpha^n}\right\}$ の漸化式が得られるが，その形から，$\left\{\frac{a_n}{\alpha^n}\right\}$ は，再び等差数列なので，一般項は，

$$\frac{a_n}{\alpha^n}=\frac{a_1}{\alpha}+\frac{(n-1)(a_2-\alpha a_1)}{\alpha^2}+\frac{(n-1)^2f(\alpha,\alpha)}{\alpha^3}$$

と表せる．したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，次のように表せる:

$$a_n=a\alpha^{n-1}+(n-1)(b-\alpha a)\alpha^{n-2}+(n-1)^2f(\alpha,\alpha)\alpha^{n-3}.$$