隣接 k 項間漸化式（特性方程式が相異なる解を持つ場合）

$p_{k-1} \neq 0$ とする．漸化式

$$p_{k-1}a_{n+(k-1)} + p_{k-2}a_{n+(k-2)} + \cdots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0 \tag{1}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう．

特性方程式

$$p_{k-1}x^{k-1} + p_{k-2}x^{k-2} + \cdots + p_1 x + p_0 = 0 \tag{2}$$

の解を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$ とし，

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{k-1}) \tag{3}$$

とおく．さらに，$\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}$ の基本対称式を，$j = 1, 2, \cdots, k-1$ に対して，

$$s_j = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq k-1} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_j}$$

と定めることにより，

$$f(x) = x^{k-1} + s_1 x^{k-2} + s_2 x^{k-3} + \cdots + s_{k-2}x + s_{k-1} \tag{4}$$

が成り立つ．

解と係数の関係から，冒頭の漸化式は，

$$\begin{aligned} a_{n+(k-1)} + \frac{p_{k-2}}{p_{k-1}}a_{n+(k-2)} + \cdots + \frac{p_1}{p_{k-1}}a_{n+1} + \frac{p_0}{p_{k-1}}a_n &= 0 \\ a_{n+(k-1)} + s_1 a_{n+(k-2)} + \cdots + s_{k-2}a_{n+1} + s_{k-1}a_n &= 0 \end{aligned}$$

と表すことができる．

$$a_{n+(k-1)} = -s_1 a_{n+(k-2)} - s_2 a_{n+(k-3)} - \cdots - s_{k-2}a_{n+1} - s_{k-1}a_n$$

に注意すると．各項の関係は，行列を用いて，

$$\begin{pmatrix} a_{n+(k-1)} \\ a_{n+(k-2)} \\ a_{n+(k-3)} \\ \vdots \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_1 & -s_2 & \cdots & \cdots & -s_{k-2} & -s_{k-1} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+(k-2)} \\ a_{n+(k-3)} \\ a_{n+(k-4)} \\ \vdots \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と表せる．ここに現れた $k-1$ 次正方行列を A とおくと，

$$\begin{pmatrix} a_{n+(k-1)} \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

が成り立つので，行列 A^n がわかれば，数列 $\{a_n\}$ の一般項が記述できる．

$\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}$ が，相異なるとする．$k-1$ 次正方行列 V を

$$V = \begin{pmatrix} \alpha_1^{k-2} & \alpha_2^{k-2} & \alpha_3^{k-2} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-2} \\ \alpha_1^{k-3} & \alpha_2^{k-3} & \alpha_3^{k-3} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{k-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

で定める[1]と，$\det V \neq 0$ である[2]．よって，逆行列 V^{-1} が存在するので，

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,k-1} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k-1,1} & v_{k-1,2} & \cdots & v_{k-1,k-1} \end{pmatrix}$$

---

[1] ほとんどヴァンデルモンド行列 https://gleamath.com/vandermonde-matrix/ である．

[2] https://gleamath.com/vandermonde-determinant/

とおくと，$V^{-1}V$ が単位行列であることから，$i,j=1,2,\cdots,k-1$ に対して，

$$v_{i,1}\alpha_j^{k-2}+v_{i,2}\alpha_j^{k-3}+\cdots+v_{i,k-2}\alpha_j+v_{i,k-1}=\begin{cases}1 & (j=i)\\ 0 & (j\neq i)\end{cases} \tag{6}$$

が成り立つ．

$j=1,2,\cdots,k-1$ に対して，$f(\alpha_j)=0$ であることと，等式 (4) から，

$$AV=\begin{pmatrix}\alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \alpha_3^{k-1} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-1}\\ \alpha_1^{k-2} & \alpha_2^{k-2} & \alpha_3^{k-2} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_{k-1}^2\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{k-1}\end{pmatrix} \tag{7}$$

が成り立つが，これは，V の j 列を α_j 倍した行列であり，等式 (6) から，

$$v_{i,1}\alpha_j^{k-1}+v_{i,2}\alpha_j^{k-2}+\cdots+v_{i,k-2}\alpha_j^2+v_{i,k-1}\alpha_j=\begin{cases}\alpha_j & (j=i)\\ 0 & (j\neq i)\end{cases} \tag{8}$$

が成り立つことに注意すると，

$$V^{-1}AV=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{k-1}\end{pmatrix} \quad \text{であり，} \quad V^{-1}A^nV=\begin{pmatrix}\alpha_1^n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2^n & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{k-1}^n\end{pmatrix}$$

が成り立ち，よって，

$$A^n=V\begin{pmatrix}\alpha_1^n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2^n & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{k-1}^n\end{pmatrix}V^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{n+k-2} & \alpha_2^{n+k-2} & \cdots & \alpha_{n+k-1}^{k-2}\\ \alpha_1^{n+k-3} & \alpha_2^{n+k-3} & \cdots & \alpha_{n+k-1}^{k-3}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_{k-1}^n\end{pmatrix}V^{-1}$$

と計算できる．(5) から，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるには，行列 A^n の $k-1$ 行目だけ求めれば十分であるが，これは，

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{k-1}v_{i,1}\alpha_i^n & \sum_{i=1}^{k-1}v_{i,2}\alpha_i^n & \cdots & \sum_{i=1}^{k-1}v_{i,k-1}\alpha_i^n\end{pmatrix}$$

と表せる．以上から，

$$a_{n+1}=a_{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}v_{i,1}\alpha_i^n+a_{k-2}\sum_{i=1}^{k-1}v_{i,2}\alpha_i^n+\cdots+a_1\sum_{i=1}^{k-1}v_{i,k-1}\alpha_i^n=\sum_{j=1}^{k-1}a_j\sum_{i=1}^{k-1}v_{i,k-j}\alpha_i^n$$

が成り立つ．従って，

$$a_n=\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}a_jv_{i,k-j}\alpha_i^{n-1}$$

が成り立つ．ここで，$v_{i,k-j}$ は，行列 V^{-1} の $(i,k-j)$ 成分であった．これは，$i=1,\cdots,k-1$ に対して，

$$F_i(x)=\frac{f(x)}{(x-\alpha_i)}=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k-1}(x-\alpha_j), \qquad \ell_i(x)=\frac{F_i(x)}{F_i(\alpha_i)}=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k-1}\frac{x-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}$$

とおいたときの，$k-2$ 次関数 $\ell_i(x)$ の展開式における $j-1$ 次の項の係数として表される[3]．

---

[3] 0 次は定数項としている．$\ell_i(x)$ は，ラグランジュ基底多項式 https://gleamath.com/lagrange-interpolation と呼ばれる．