単位円上に頂点を持つ正多角形

本稿の動機は，次のような問題を考えることである．

> 次の値を求めよ．
> $$\sin 10^\circ + \sin 82^\circ + \sin 154^\circ + \sin 226^\circ + \sin 298^\circ$$

〔解答〕． $\theta = 72^\circ$ とすると，

$$\sin 82^\circ = \sin(10^\circ + \theta) \quad , \quad \sin 154^\circ = \sin(10^\circ + 2\theta),$$
$$\sin 226^\circ = \sin(10^\circ + 3\theta) \quad , \quad \sin 298^\circ = \sin(10^\circ + 4\theta)$$

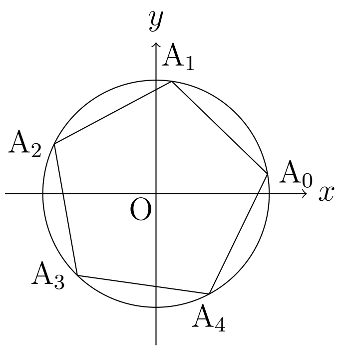
なので，単位円上の 5 点を A_k $(k = 0, 1, \cdots, 4)$ を

$$\mathrm{A}_k\,(\cos(10^\circ + k\theta), \sin(10^\circ + k\theta))$$

と定めることで，問題は，

単位円上に頂点を持つ<u>正五角形</u>$\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$ の頂点の y 座標の和を求める

問題としてみることができる．



$k = 0, 1, \cdots, 4$ に対して，

$$a_k = \cos(10^\circ + k\theta) + i \sin(10^\circ + k\theta)$$

とおき，座標平面上の点 A_k と複素数平面上の a_k を同一視する（i は虚数単位）．
$c = \cos 10^\circ + i \sin 10^\circ$，$a = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくと，$a_k = ca^k$ が成り立つので，

$$\sum_{k=0}^{4} a_k = \sum_{k=0}^{4} ca^k = c\sum_{k=0}^{4} a_k = c(1 + a + a^2 + a^3 + a^4)$$

が成り立つ． $a^5 = 1$ であることに注意すると，

$$c(a-1)(1 + a + a^2 + a^3 + a^4) = c(a^5 - 1) = 0$$

であるが，$a \neq 1$ なので，$\displaystyle\sum_{k=0}^{4} a_k = c(1 + a + a^2 + a^3 + a^4) = 0$ がしたがう．求める値は，$\displaystyle\sum_{k=0}^{4} a_k$ の虚部であったので，答えは 0 である． □

補足. 上の問題では，sin の 5 つの和を求めたが，sin が cos であっても同様に解答できることがわかる．また，正五角形でなく，次のように一般化できることも明らかである．

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\varphi + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\varphi + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0 \qquad (0 \leqq \varphi < 2\pi,\ n \in \mathbb{N})$$