２円の交点を通る図形の方程式

まず円についての基本的な事実を思い出そう．方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ が円を表すための必要十分条件は，$l^2+m^2-4n>0$ が成り立つことであった．また，

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \iff \left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2}\right)^2$$

と変形できることから，この円の中心は，$\left(-\frac{l}{2},-\frac{m}{2}\right)$ であり，半径は，$\frac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2}$ と表せるのであった．

２つの円の位置関係は，中心間の距離 d と２円の半径 r_1,r_2 を用いて分類できるが，特に，半径の異なる２円（$r_1>r_2$ とする）が，２点で交わるための必要十分条件は，

$$r_1-r_2<d<r_1+r_2$$

が成り立つことであった．

それでは本題に入ろう．２円が異なる２点で交わる場合，その２つの共有点を通る図形（直線もしくは円に限る）について考察する．通る２点の情報だけでは，円は１つに決まらないが，変数 k を用いて，これらの直線や円たちを統一して記述することができる．

定理． ２円 $C_1: x^2+y^2+l_1x+m_1y+n_1=0$，$C_2: x^2+y^2+l_2x+m_2y+n_2=0$ が異なる２点で交わっているとする．このとき，任意の実数 k に対して，方程式

$$k(x^2+y^2+l_1x+m_1y+n_1)+x^2+y^2+l_2x+m_2y+n_2=0 \tag{1}$$

は，次のような図形を表す．

- $k=-1$ のとき，C_1 と C_2 の２交点を通る直線，
- $k\neq-1$ のとき，C_1 と C_2 の２交点を通る円．

逆に，この２交点を通る円[a]は，ある k が存在して，上の形の方程式で表すことができる．

[a]正確には，円 C_1 以外の２交点を通る全ての円．

証明．$f(x,y)=k(x^2+y^2+l_1x+m_1y+n_1)+x^2+y^2+l_2x+m_2y+n_2$ とおく．２円 C_1，C_2 の２交点を $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ とすると，$f(x_1,y_1)=0$ かつ $f(x_2,y_2)=0$ が成り立つので，方程式 (1) が表す図形は，ℓ と C の２交点を通ることがわかる．

$k=-1$ のとき，方程式 (1) は，

$$(l_2-l_1)x+(m_2-m_1)y+n_2-n_1=0 \tag{2}$$

と整理できるがこれは直線を表す．なぜならば，$l_1=l_2$ かつ $m_1=m_2$ を仮定すると，C_1 と C_2 は同心円となるが，同心円が異なる２点で交わることは不可能であるからである．

$k\neq-1$ の場合を考える．$k=0$ のときは，方程式 (1) は，円 C_2 を表すのでこの場合は良い．以下では，$k\neq-1,0$ を仮定する．このとき，方程式 (1) は，

$$x^2+y^2+\frac{kl_1+l_2}{k+1}x+\frac{km_1+m_2}{k+1}y+\frac{kn_1+n_2}{k+1}=0$$

と整理できる．よって，この方程式が円を表すためには，$(\frac{kl_1+l_2}{k+1})^2+(\frac{km_1+m_2}{k+1})^2-4(\frac{kn_1+n_2}{k+1})>0$ を示さねばならない．C_1，C_2 の半径をそれぞれ，r_1，r_2 $(r_1>r_2)$ とすると，$i=1,2$ に対して，

$$r_i=\frac{\sqrt{l_i^2+m_i^2-4n_i}}{2} \iff 4r_i^2=l_i^2+m_i^2-4n_i \tag{3}$$

が成り立つ．また，２円の中心間の距離を d と置くと，

$$d = \sqrt{\left(-\frac{l_1}{2}+\frac{l_2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}\right)^2} \iff 4d^2 = (l_1 - l_2)^2 + (m_1 - m_2)^2 \tag{4}$$

が成り立つ．さらに，C_1 と C_2 が異なる２点で交わるという仮定から，

$$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2 \iff (r_1 - r_2)^2 < d^2 < (r_1 + r_2)^2 \iff -kd^2 > \begin{cases} -k(r_1 + r_2)^2 & (k > 0) \\ -k(r_1 - r_2)^2 & (k < 0) \end{cases} \tag{5}$$

が成り立つ．以上を用いて，次のように評価できるｙ．

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{kl_1 + l_2}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{km_1 + m_2}{k+1}\right)^2 - 4\left(\frac{kn_1 + n_2}{k+1}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{(k+1)^2}\left\{k^2(l_1^2 + m_1^2 - 4n_1) + (l_2^2 + m_2^2 - 4n_2) - 4kn_1 - 4kn_2 + 2kl_1l_2 + 2km_1m_2\right\} \\
&\qquad = \frac{1}{(k+1)^2}\left\{4k^2r_1^2 + 4r_2^2 + k(4r_1^2 + 4r_2^2) - k\{(l_1 - l_2)^2 + (m_1 - m_2)^2\}\right\} \\
&\qquad = \left(\frac{2}{k+1}\right)^2\left\{k^2r_1^2 + r_2^2 + k(r_1^2 + r_2^2) - kd^2\right\} \\
&\qquad > \left(\frac{2}{k+1}\right)^2\left\{k^2r_1^2 + r_2^2 + k(r_1^2 + r_2^2) - k(r_1^2 \pm r_2^2)^2\right\} \\
&\qquad = \left(\frac{2}{k+1}\right)^2\left(k^2r_1^2 + r_2^2 \mp 2kr_1r_2\right) \\
&\qquad = \left(\frac{2}{k+1}\right)^2(kr_1 \mp r_2)^2 > 0
\end{aligned}$$

ここで，２行目から，３行目にかけては，等式 (3) を，３行目から，４行目にかけては，等式 (4) を用いた．さらに，４行目から，５行目にかけては，不等式 (5) を用いているが，ここでは，k の符号により場合わけした２つの場合を記号 $\pm$ を用いて合わせて記述している．したがって，$k \neq -1$ のとき，方程式 (1) は，円を表すことがわかった．

逆を示す．すなわち，C_1，C_2 の２交点を通る円のうち，C_1 以外の円はすべて，ある k が存在して，方程式 (1) の形で書けることを示す．そのために，仮定をみたし，方程式 (1) の形で書けない円 C' が存在するとして，その方程式を，

$$C' : x^2 + y^2 + l'x + m'y + n' = 0$$

とする．C' と C_1 の２交点を通る直線の方程式は，前半の結果を用いて，

$$(l' - l_1)x + (m' - m_1)y + n' - n_1 = 0$$

と書けるが，これは，C_1 と C_2 の２交点を通る直線 (2) に他ならないので，ある実数 k' が存在して，

$$k'(l_2 - l_1) = l' - l_1, \qquad k'(m_2 - m_1) = m' - m_1, \qquad k'(n_2 - n_1) = n' - n_1$$

が成り立つ[1]．ここで，C と C' は異なるので，$k' \neq 0$ に注意して，$k = \frac{1}{k'} - 1$ と置くと，

$$l' = \frac{kl_1 + l_2}{k+1}, \qquad m' = \frac{km_1 + m_2}{k+1}, \qquad n' = \frac{kn_1 + n_2}{k+1}$$

が成り立つ．これを C' の方程式に代入して整理すると，方程式 (1) の形を得る．□

[1] ２直線 $ax + by + c = 0, a'x + b'y + c' = 0$ が一致するための必要十分条件は，$a : b : c = a' : b' : c'$ であること，すなわち，ある k が存在して，$ka = a', kb = b', kc = c'$ が成り立つことであった．