円と直線の関係

点 $\mathrm{C}(a,b)$ を中心とする半径 r の円

$$C : (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

と，直線

$$\ell : sx+ty+u=0$$

の位置関係は，次の 3 つに分類される．

- 異なる 2 点で交わる．
- 1 点で接する．
- 共有点を持たない．

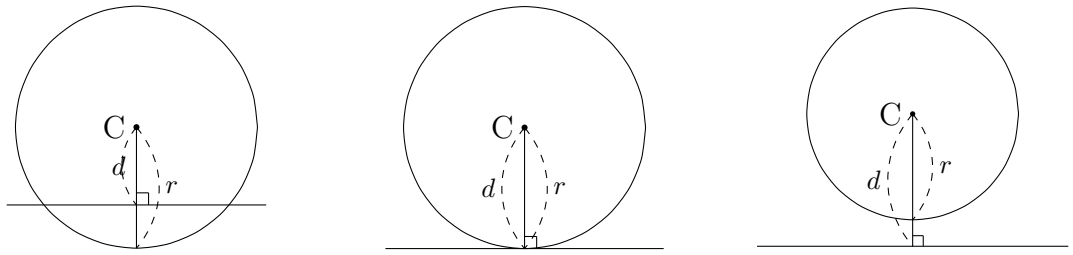
それぞれの方程式から，位置関係を判断する方法を考えよう．

1. 中心と直線の距離 d と半径 r による分類方法
まずは，点と直線の距離の公式を思い出す．円 C の中心 $\mathrm{C}(a,b)$ と，直線 ℓ の距離を d とすると

$$d=\frac{|\,sa+tb+u\,|}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

と書けるのであった．この d と，円の半径 r との大小関係から，円と直線の関係を分類できる．すなわち，

- 異なる 2 点で交わる．
- 1 点で接する．
- 共有点を持たない．



$d<r$　　$d=r$　　$d>r$

と分類できる．

2. 連立方程式の実数解の個数による分類方法
円の方程式と直線の方程式による連立方程式を考える．

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \\ sx+ty+u=0 \end{cases}$$

この連立方程式の実数解は，円と直線の共有点に対応しているので，その個数から位置関係を分類できる．必要なのは実数解の個数だけなので，判別式を用いれば十分である．上の連立方程式において，y または x を消去して得られる x または y の 2 次方程式の判別式を D とする．このとき判別式の符号と実数解の個数の関係から，次のように分類できる．

- 異なる 2 点で交わる．
  $\iff$ 実数解が 2 つ
  $\iff D>0$
- 1 点で接する．
  $\iff$ 実数解が 1 つ
  $\iff D=0$
- 共有点を持たない．
  $\iff$ 実数解を持たない
  $\iff D<0$

次に直線と円が異なる２点で交わる場合，その２つの共有点を通る円について考察する．通る２点の情報だけでは，円は１つに決まらないが，変数 k を用いて，これらの円たちを統一して記述することができる．

定理. 直線 $\ell : sx+ty+u=0$ と，円 $C : x^2+y^2+lx+my+n=0$ が異なる２点で交わっているとする．このとき，任意の実数 k に対して，方程式

$$k(sx+ty+u)+x^2+y^2+lx+my+n=0 \tag{1}$$

は，ℓ と C の２交点を通る円を表す．逆に，この２交点を通る円は，ある k が存在して，上の形の方程式で表すことができる．

証明. $f(x,y)=k(sx+ty+u)+x^2+y^2+lx+my+n$ とおく．直線 ℓ と円 C の２交点を $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ とすると，$f(x_1,y_1)=0$ かつ $f(x_2,y_2)=0$ が成り立つので，方程式 (1) が表す図形は，ℓ と C の２交点を通ることがわかる．次に，方程式 (1) が表す図形が円を表すことを示す．そのためには，

$$f(x,y)=x^2+y^2+(ks+l)x+(kt+m)y+ku+n$$

と変形できるので，$(ks+l)^2+(kt+m)^2-4(ku+n)>0$ となることを示せば良い[1]．ここで，円 C は，

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2}\right)^2$$

と表せることから，円 C の中心は $\left(-\dfrac{l}{2},-\dfrac{m}{2}\right)$ であり，この点と直線 ℓ との距離を d とすると，点と直線の距離の公式から，

$$d=\frac{|\ s(-\frac{l}{2})+t(-\frac{m}{2})+u\ |}{\sqrt{s^2+t^2}}=\frac{|\ sl+tm-2u\ |}{2\sqrt{s^2+t^2}}$$

が従う．さらに，ℓ と C が異なる２点で交わるという仮定から，

$$d<r \Longleftrightarrow \frac{|\ sl+tm-2u\ |}{2\sqrt{s^2+t^2}}<\frac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2} \Longleftrightarrow \frac{(sl+tm-2u)^2}{s^2+t^2}<l^2+m^2-4n$$

が成り立つ．これに注意すると，

$$\begin{aligned}(ks+l)^2+(kt+m)^2-4(ku+n) &= k^2(s^2+t^2)+2k(sl+tm-2u)+l^2+m^2-4n\\ &> k^2(s^2+t^2)+2k(sl+tm-2u)+\frac{(sl+tm-2u)^2}{s^2+t^2}\\ &= \left(k\sqrt{s^2+t^2}+\frac{sl+tm-2u}{\sqrt{s^2+t^2}}\right)^2>0\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，任意の k に対して，方程式 (1) が表す図形は円である．

次に逆を示す．ℓ と C の２交点を通る円であって，方程式 (1) の形で書けないものが存在するとして，その円を $C' : x^2+y^2+l'x+m'y+n'=0$ とする．方程式 (1) において，$k=0$ としたものが円 C なので，C と C' は異なる円である．ここで，直線[2] $\ell' : (l'-l)x+(m'-m)y+n'-n$ を考えると，これが C と C' の２交点を通ることが確認できる．よって，ℓ' は ℓ と一致するから，ある実数 k が存在して，

$$ks=l'-l,\ kt=m'-m,\ ku=n'-n \Longleftrightarrow l'=ks+l,\ m'=kt+m,\ n'=ku+n$$

と書ける．これを C' の方程式に代入して整理すれば，方程式 (1) の形が得られる． □

[1] 方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ が，円を表すための必要十分条件は，$l^2+m^2-4n>0$ となることであった．

[2] $l'=l$ かつ $m'=m$ を仮定すると，C と C' は異なる円であることから，$n'\neq n$ であるが，この場合，C と C' は同心円であり，半径が異なることから，C' が，ℓ と C の２交点を通ることに矛盾する．よって，$l'-l$ と $m'-m$ のどちらか一方は 0 でない．