２直線の関係

２直線 ℓ_1, ℓ_2 が与えられたとき，それらの位置関係は次のようにまとめることができる．

２直線の関係

- **1. 平行**
  - (i) 一致する
  - (ii) 一致しない（交点を持たない）
- 2. 交わる（平行でない）
  - **(iii) 垂直**
  - 垂直でない

それぞれの場合において，２直線を表す方程式の間にどのような関係があるのか考えよう．

- ２直線 $\ell_1 : y = m_1x + n_1$，$\ell_2 : y = m_2x + n_2$ について，

1. ２直線が平行であることと傾きが等しいことは同値なので次が成り立つ．

$$\ell_1,\ \ell_2 \text{ が平行} \iff m_1 = m_2$$

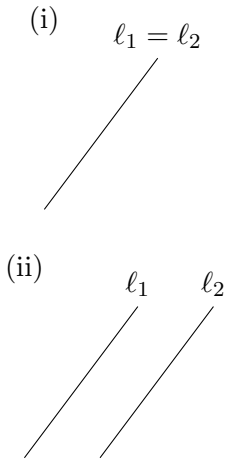
(i) さらに一致する場合は，y 切片も一致するので，次が成り立つ．

$$\ell_1,\ \ell_2 \text{ が一致} \iff m_1 = m_2 \text{ かつ } n_1 = n_2$$

(ii) 平行であるが一致しない場合は，２直線は交点を持たず，

$$\ell_1,\ \ell_2 \text{ が交点を持たない} \iff m_1 = m_2 \text{ かつ } n_1 \neq n_2$$

が成り立つ．

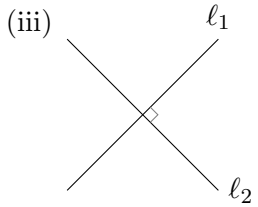


2. ２直線が１点で交わる（平行でない）ことと傾きが異なることは同値なので，次が成り立つ．

$$\ell_1,\ \ell_2 \text{ が１点で交わる} \iff m_1 \neq m_2$$

(iii) さらに２直線が垂直に交わる場合，次が成り立つ．

$$\ell_1,\ \ell_2 \text{ が垂直に交わる} \iff m_1m_2 = -1$$



これは次のようにして証明できる：

ℓ_1 と ℓ_2 が垂直に交わっていることから，m_1 と m_2 は異符号であることがわかる．どちらでも良いので，$m_2 < 0 < m_1$ を仮定する．交点を P とし，右図のように３点 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{R}, \mathrm{Q}_2$ を定める．ただし，$\mathrm{PR} = 1$ とする．

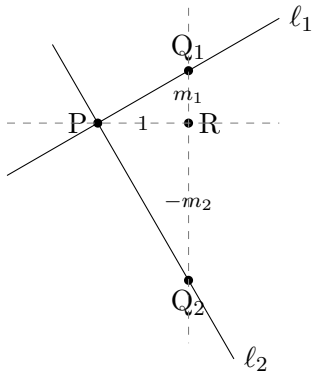
まず直角三角形 $\mathrm{PQ_1R}$ に三平方の定理を適用することで，$\mathrm{PQ_1} = \sqrt{1+m_1^2}$ が従う．さらに $\triangle\mathrm{PQ_1R}$ と $\triangle\mathrm{Q_2Q_1P}$ は相似なので，$m_2 < 0$ から，$\mathrm{Q_2Q_1} = m_1 - m_2$ に注意すると，

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{PQ_1} & : & \mathrm{Q_1R} & = & \mathrm{Q_2Q_1} & : & \mathrm{Q_1P} \\ \sqrt{1+m_1^2} & : & m_1 & = & m_1 - m_2 & : & \sqrt{1+m_1^2} \end{array}$$

が成り立つ．以上から，

$$1 + m_1^2 = m_1(m_1 - m_2) \iff m_1m_2 = -1$$

が従う．



- 2 直線 $\ell_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$，$\ell_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ について[1]，
$b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ のとき，

$$\ell_1 : y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}, \qquad \ell_2 : y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}$$

と書けるので，上の結果を用いて，次が従う．

1. ℓ_1，ℓ_2 が平行 $\iff -\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2} \iff a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \iff a_1 : b_1 = a_2 : b_2$

(iii) ℓ_1，ℓ_2 が垂直 $\iff \left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right) = -1 \iff a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \iff a_1 : b_1 = b_2 : -a_2$

$b_1 = 0$ のとき，$\ell_1 : x = -\dfrac{c_1}{a_1}$ となり，これは，y 軸と平行な直線である．よって，

$$\ell_1,\ \ell_2 \text{ が平行} \iff \ell_2 \text{ も } y \text{ 軸と平行な直線} \iff b_2 = 0$$
$$\ell_1,\ \ell_2 \text{ が垂直} \iff \ell_2 \text{ は } x \text{ 軸と平行な直線} \iff a_2 = 0$$

が従う．$b_2 = 0$ のときも同様である．

注意. 「ℓ_1，ℓ_2 が一致すること」と，「$a_1 = a_2$ かつ $b_1 = b_2$ かつ $c_1 = c_2$ が成り立つこと」は同値<u>ではない</u>ことに注意する．しかし，上の結果から，

$$\ell_1,\ \ell_2 \text{ が一致} \iff -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \text{ かつ } -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2} \iff a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$$

は成り立つ．これは例えば，直線 $ax + by + c = 0$ と，直線 $(ka)x + (kb)y + (kc) = 0$ が一致するという当たり前のことを言っているだけである．

これまでの結果を用いれば，1 つの直線の方程式と，その直線との関係から，もう 1 つの直線の方程式を求めることができる．

命題. 点 (x_1, y_1) を通り，直線 $\ell : ax + by + c = 0$ に平行，垂直な直線の方程式は，それぞれ，

$$\text{平行}：a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0\ , \qquad \text{垂直}：b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$$

である．

証明. 求める直線を ℓ' とし，その方程式を $\ell' : Ax + By + C = 0$ とする．

- ℓ と ℓ' が平行なとき，$a : b = A : B$ が成り立つので，ある実数 k が存在して，$ka = A$ かつ $kb = B$ が成り立つ．$c' = \dfrac{C}{k}$ とおくと，ℓ' の方程式は，

$$\ell' : kax + kby + C = 0 \iff ax + by + \frac{C}{k} = 0 \iff ax + by + c' = 0 \tag{1}$$

と書ける．さらに，ℓ' は，点 (x_1, y_1) を通るので，

$$ax_1 + by_1 + c' = 0 \iff c' = -ax_1 - by_1$$

が成り立つ．これを ℓ' の方程式 (1) に代入することで，次が従う．

$$ax + by + c' = 0 \iff ax + by - ax_1 - by_1 = 0 \iff a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0.$$

- ℓ と ℓ' が垂直なとき，$a : b = B : -A$ が成り立つので，ある実数 k が存在して，$ka = B$ かつ $kb = -A$ が成り立つ．上と同様に c' を設定することで，ℓ' の方程式は，

$$\ell' : -bx + ay + c' = 0$$

と書ける．さらに，点 (x_1, y_1) を通ることから，$c' = bx_1 - ay_1$ が得られるので，これを上に代入することで，結果の式が得られる．

□

[1] 直線なので，$(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ としている．(a_2, b_2) も同様．