階比数列

定義. 数列 $\{a_n\}$ の**階比数列** $\{b_n\}$ とは，

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

で定義される数列のことである．ただし，任意の $n \geqq 1$ に対して，$a_n > 0$ であるとする．

次に，積の記号を定義する．

定義. 数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$\prod_{k=1}^{n} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

と定義する．

初項 a_1 の値と，階比数列 $\{b_n\}$ の一般項から，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる．

> $n \geqq 2$ の時，次が成り立つ．
>
> $$a_n \;=\; a_1 \prod_{k=1}^{n-1} b_k$$

証明. 階比数列の定義から，$b_k = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ なので，

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1} b_k &= b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} \\ &= \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ &= \frac{\cancel{a_2}}{a_1} \cdot \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}} \cdot \frac{\cancel{a_4}}{\cancel{a_3}} \cdots \frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}} \quad = \frac{a_n}{a_1}\end{aligned}$$

が成り立つ．両辺に a_1 を掛けることにより，求める等式を得る． □

例. 初項が 1 であり，階比数列の一般項が $1 + \dfrac{2}{n}$ である数列の一般項を求める．

求める数列を $\{a_n\}$ とし，その階比数列を $\{b_n\}$ とする．

$$b_n = 1 + \frac{2}{n} = \frac{n+2}{n}$$

なので，

$$\prod_{k=1}^{n-1} b_k = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+2}{k} = \frac{\cancel{3}}{1} \cdot \frac{\cancel{4}}{2} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{4}} \cdots \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n-3}} \cdot \frac{n}{\cancel{n-2}} \cdot \frac{n+1}{\cancel{n-1}} = \frac{1}{2} n(n+1)$$

である．$a_1 = 1$ なので，$n \geqq 2$ に対して，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{1}{2} n(n+1) \tag{1}$$

と計算できる．

$n = 1$ の時，$a_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$ であり，これは，$n = 1$ の時にも成り立つ．よって，任意の自然数 n に対して，(1) が成り立つ．