等差数列と等比数列

定義.

- **数列**とは，ある規則に従って並べられてた数の列のことをいう．
- **数列の項**とは，数列を構成する各々の数のことをいう．初めの項を**初項（第 1 項）**といい，n 番目の項を**第 n 項**という．
- **一般項**とは，数列の第 n 項を n の式で表したもののことをいう．
- **有限数列**とは，項の数が有限個の数列のことをいう．有限数列に対しては，最後の項を**末項**といい，項の数を**項数**という．
- **無限数列**とは，項が無限に続く数列のことをいう．
- 数列のことを，$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ や，$\{a_n\}$ などと表す．
- **数列の和**とは，数列の各項を足し合わせたもののことをいい，第 1 項から第 n 項までの和を，しばしば S_n と表す．

例.

- 数列 $3, 6, 9, \cdots, 3n, \cdots$ について，初項は 3 であり，一般項は $3n$ である．この数列の第 1 項から第 4 項までの和 S_4 は，$S_4 = 3 + 6 + 9 + 12 = 30$ である．
- 有限数列 $2, 4, 6, 8, 10$ について，末項は 10 であり，項数は 5 である．

等差数列

初項に定数 d を次々と加えてできる数列を**等差数列**といい，定数 d を公差という．数列の作り方から，隣り合う項の差が等しいので，等差 数列という．

$$a_1, \underset{+d}{\longrightarrow} a_2, \underset{+d}{\longrightarrow} a_3, \underset{+d}{\longrightarrow} a_4, \underset{+d}{\longrightarrow} \cdots\cdots\cdots\cdots, \underset{+d}{\longrightarrow} a_n, \underset{+d}{\longrightarrow}$$

定義から明らかに，$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_{n+1} = a_n + d$ が成り立つ．

初項 a，公差 d の等差数列に対して，次が成り立つ．

- 一般項（第 n 項）は，$a_n = a + (n-1)d$
- 初項から第 n 項までの和は，$S_n = \dfrac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$
  これは，末項を ℓ（$= a_n$）としたとき，$S_n = \dfrac{1}{2}n(a + \ell)$ ともかける．

証明. 等差数列の定義から，全ての自然数 n に対して，$a_{n+1} = a_n + d$ が成り立つので，

$$a_n \;=\; a_{n-1} + d \;=\; a_{n-2} + 2d \;=\; \cdots \;=\; a_2 + (n-2)d \;=\; a_1 + (n-1)d \;=\; a + (n-1)d$$

が成り立つ．

$a_n = \ell$ とする．$1 \leqq s \leqq t \leqq n$ であり，$s + t = n + 1$ が成り立つ s, t に対して，

$$a_s + a_t \;=\; a + (s-1)d + a + (t-1)d \;=\; a + a + (n-1)d \;=\; a + \ell$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & + & a_2 & + & \cdots & + & a_{n-1} & + & a_n & = & S_n \\ a_n & + & a_{n-1} & + & \cdots & + & a_2 & + & a_1 & = & S_n \end{array}$$

が成り立つ．項数は n なので，上下の数を足すことによって，$2S_n = n(a+\ell)$ が成り立つ．これを解いて，$S_n = \dfrac{1}{2}n(a+\ell)$ を得る．最後に，$\ell = a_n = a+(n-1)d$ を代入して，$S_n = \dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$ もわかる． □

等比数列

初項に定数 r を次々と掛けてできる数列を**等比数列**といい，定数 r を公比という．数列の作り方から，隣り合う項の比が等しいので，等比数列という．

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots,\quad a_n,$$
$$\times r \quad \times r \quad \times r \quad \times r \qquad\qquad \times r \quad \times r$$

定義から明らかに，$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_{n+1} = ra_n$ が成り立つ．

初項 a，公比 r の等比数列に対して，次が成り立つ．

- 一般項（第 n 項）は，$a_n = ar^{n-1}$
- 初項から第 n 項までの和は，$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} \qquad (r \neq 1)$

  $S_n = na \qquad (r = 1)$

証明．等比数列の定義から，全ての自然数 n に対して，$a_{n+1} = ra_n$ が成り立つので，

$$a_n = ra_{n-1} = r^2a_{n-2} = \cdots = r^{n-2}a_2 = r^{n-1}a_1 = r^{n-1}a$$

が成り立つ．

$r \neq 1$ とする．

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= a + ra + r^2a + \cdots + r^{n-2}a + r^{n-1}a \\ &= a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}) \end{aligned}$$

であり，

$$rS_n = a(r + r^2 + r^3 \cdots + r^{n-1} + r^n)$$

が成り立つので，

$$S_n - rS_n = a(1-r^n)$$

を得る．これを解けば，$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ が得られる．

$r = 1$ の時は，全ての項の値が等しいので，

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= a + a + \cdots + a + a \\ &= na \end{aligned}$$

が成り立つ． □