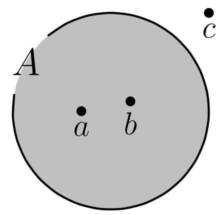
# 集合と要素と部分集合

**定義.** 範囲がはっきりしたものの集まりを**集合**といい，集合を構成している 1 つ 1 つのものを、その集合の**要素**または**元**という．

集合と要素について，はじめは右図のようなイメージを持つと良い．右図は，集合 $A$ において，

$a, b$ は $A$ の要素であるが，$c$ は $A$ の要素ではない．

ということを表している．




**定義.** $a$ が集合 $A$ の要素であるとき，$a$ は集合 $A$ に**属する**といい，$a \in A$ と表す．また，$c$ が集合 $A$ の要素でないとき，$c \notin A$ と表す．

次に，集合の表し方を定義する．下の例で紹介するように，要素の数が有限である場合は，全ての要素を書き並べても良いが，そうでない場合は，次の表し方が便利である．

**定義.** $x$ についての条件 $P(x)$ に対して，

$$\{x \in S \mid P(x)\}$$

で，集合 $S$ の要素であって，条件 $P(x)$ を満たすもの全体の集合を表す．これは，$\{x \in S \ ; \ P(x)\}$ とかくこともある．また，$S$ が明らかである場合や，特に問題にしない場合は，次の例のように省略して書く場合もある．

**例.** 以下はどちらも「一桁の奇数」の集合を表す．

- 要素を書き並べる方法

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

- 要素の満たす条件を示す方法

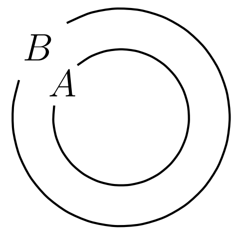
$$\begin{aligned} A &= \{x \mid 1 \leq x \leq 9,\ x \text{ は奇数 }\} \\ &= \{2k - 1 \mid 1 \leq x \leq 5\} \end{aligned}$$

**定義.** 要素を 1 つも持たない集合のことを**空集合**といい，$\varnothing$ と表す．

次に部分集合や集合が等しいということを定義する．

**定義.** 2 つの集合 $A, B$ において，

- 「$x \in A \Rightarrow x \in B$」が成り立つとき，$A$ は $B$ の**部分集合**，または，$A$ は $B$ に**含まれる**といい，$A \subset B$ と表す．
- 「$A \subset B$ かつ $B \subset A$」が成り立つとき，$A$ と $B$ は**等しい**といい，$A = B$ と表す．
- 空集合 $\varnothing$ は，全ての集合の部分集合を定義する．




**注意.** 記号 $<$ と，記号 $\subset$ を混同してはならない．部分集合の定義から，任意の集合 $A$ に対して，$A \subset A$ （$A$ は $A$ 自身の部分集合である）が成り立つ．

また上では，集合 $A, B$ に対して，$A = B$ であることを「$A \subset B$ かつ $B \subset A$」が成り立つことと定義したが，これは，「$x \in A \Rightarrow x \in B$ かつ，$x \in B \Rightarrow x \in A$」が成り立つということであり，すなわち，$A$ と $B$ の要素が一致している状態を表している[1]．

**例.**

- $A = \{2, 3\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$ とすると，集合 $A$ は，集合 $B$ の部分集合である．すなわち $A \subset B$ である．なぜならば，$A$ の要素 $2, 3$ はどちらも $B$ の要素だからである．
- 自然全体の集合 $\mathbb{N}$ は，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ の部分集合である．すなわち，$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ である．

[1] 記号 $\subset$ に慣れないうちは，不自然な定義に思えるかもしれないが，当たり前のことを言っているに過ぎない．