$\sum$ の定義

定義. 数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

と定義する．

例. 一般項が，$a_n = 2n$ である数列 $\{a_n\}$ について，

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

が成り立つ．

$\sum$ の性質

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ と定数 c に対して，次が成り立つ．

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

証明. 定義から，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) &= (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\end{aligned}$$

が成り立ち，同様に，

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = (ca_1 + \cdots + ca_n) = c(a_1 + \cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

が成り立つ． □

和の公式

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$ （c は定数）
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$ $(r \neq 1)$

証明. 1. 定義から $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c$ は，c を n 個足すということなので，cn である．

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$ である．これは，初項が 1 で公差が 1 の等差数列の第 1 項から第 n 項までの和であるから，等差数列の和の公式から結果が従う．

3. 等式 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ と，上で証明した $\sum$ の性質から，

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{(k+1)^3 - k^3\right\} = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

が成り立つ．

左辺は，

$$\begin{array}{rrcl} & 2^3 & - & 1^3 \\ & 3^3 & - & 2^3 \\ & 4^3 & - & 3^3 \\ & & \vdots & \\ +) & (n+1)^3 & - & n^3 \\ \hline & (n+1)^3 & - & 1^3 \end{array}$$

であり，

等式

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$$

を得る．これを解いて，求める公式を得る．

右辺は，和の公式 1.，2. を用いることにより，

$$\begin{aligned} & 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ = \ & 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n \\ = \ & 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n \end{aligned}$$

と計算できるので，

4. 等式 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ と $\sum$ の性質を用いることで，等式

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{(k+1)^4 - k^4\right\} = \sum_{k=1}^{n}(4k^3 + 6k^2 + 4k^2 + 1) = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

得る．上と同様に，左辺は多くの項が相殺されるので，$(n+1)^4 - 1$ となり，右辺は，これまでの公式を使うことで，$4\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$ と計算できる．あとは，この等式を解けばよい．

5. 和の公式 2.，3. を用いることで次のように計算できる．

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

6. $r^0 = 1$ に注意すると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}$ である．これは，初項が 1 で公比が r の等比数列の第 1 項から第 n 項までの和であるから，等比数列の和の公式から結果が従う．

□