1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

$\vdots$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+\ell) = \frac{1}{\ell+2}n(n+1)\cdots(n+\ell+1) \qquad (\ell \geqq 0)$

証明. 5. だけ証明する．$k \geqq 0$ に対して，

$$a_k := k(k+1)(k+2)\cdots(k+\ell)(k+\ell+1)$$

とおくと，

$$a_{k-1} = (k-1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+\ell)$$

である．上の 2 式を引くことによって，

$$\begin{aligned} a_k - a_{k-1} &= k(k+1)\cdots(k+\ell)\{k+\ell+1-(k-1)\} \\ &= k(k+1)\cdots(k+\ell)(\ell+2) \end{aligned}$$

となるから，等式

$$\frac{1}{\ell+2}(a_k - a_{k-1}) = k(k+1)\cdots(k+\ell)$$

を得る．両辺の k について，$k=1$ から n までの和をとると，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+\ell) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ell+2}(a_k - a_{k-1}) \\ &= \frac{1}{\ell+2}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) \\ &= \frac{1}{\ell+2}(a_n - a_0) \\ &= \frac{1}{\ell+2}n(n+1)(n+2)\cdots(n+\ell)(n+\ell+1) \end{aligned}$$

となり，求める等式を得る． □

例. 上の結果から，次が成り立つ．

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} n(n+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m(m+1)(m+2) = \frac{1}{6}m(m+1)(m+2)$$