解と係数の関係

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，定数 a,b,c を用いて次のように記述できるのであった．

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\qquad (D=b^2-4ac)$$

これを解の公式と呼んでいた．この公式自体も解と係数の関係であると言えるが，見ての通り少し複雑な形をしている．それよりも，二次方程式の 2 つの解[1]の和と積は，とても綺麗な形をしていることを次に示す．このような関係のことを一般的には解と係数の関係と呼ぶ．

補題. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α,β とするとき，次が成り立つ．（重解でも良い．）

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\quad,\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

証明．$D=b^2-4ac$ とする．解の公式を用いて，α,β は，次のようにかける．

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\quad,\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

ここで，$D<0$ なら，$\sqrt{D}=\sqrt{-D}i=\sqrt{4ac-b^2}i$ であることに注意する（i は虚数単位）．これから，次が成り立つ．

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{b}{a},$$
$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{(-b)^2-\sqrt{D}^2}{4a^2}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$\alpha=\beta$ の場合でも，$D=b^2-4ac=0\Leftrightarrow b^2=4ac$ なので，上の式変形は正当である． □

上の結果の逆も成り立つ．

補題. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において，複素数 α,β が，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\quad,\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

を満たすとき，α,β は，上の二次方程式の解である．（重解でも良い．）

証明．$f(x)=ax^2+bx+c$ とする．$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ に仮定の式を代入することで，

$$f(x)=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

を得る．これから，$f(\alpha)=f(\beta)=0$ が従うので，α,β は，二次方程式 $f(x)=0$ の解である． □

以上の補題から，次の定理が従う[2]．

解と係数の関係

定理. 多項式 $f(x)=ax^2+bx+c$ と複素数 α,β に対して，次が成り立つ（$\alpha=\beta$ でも良い）．

$$\alpha,\beta \text{ は } f(x)=0 \text{ の解である．}\quad\Longleftrightarrow\quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}\quad,\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

[1]重解の場合を含む．
[2]因数定理を知っていれば，上のように必要性と十分性を証明しなくても因数定理の同値性から定理が従う．