√ 2次式と虚数解との関係

本稿の動機は，次の命題の幾何学的な意味を考えることである．

命題． $f(x) = x^2 + bx + c$ $(b, c \in \mathbb{R})$ とし，判別式 $D = b^2 - 4c \leqq 0$ を仮定する．二次方程式 $f(x) = 0$ の解のひとつを α とするとき，次が成り立つ．

$$\sqrt{f(x)} \;=\; |\; x - \alpha \;|$$

まずは，上の命題を証明する．

証明．$D = 0$ のとき，二次関数 $y = f(x)$ のグラフは，x 軸と接している．

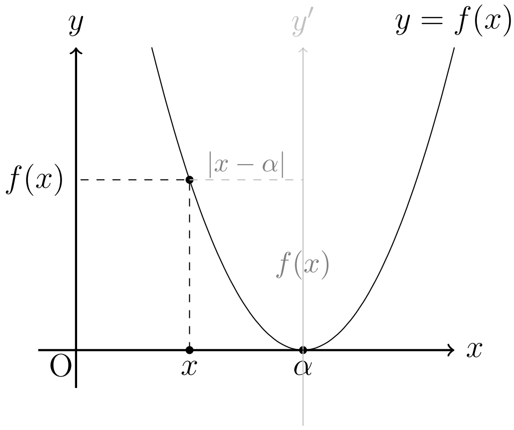
$y = f(x)$ のグラフは，$y = x^2$ のグラフを x 軸の方向に α だけ平行移動させたグラフなので，右図のように，軸 y' を考えることで，

$$f(x) = |\; x - \alpha \;|^2$$

が成り立つ．任意の実数 x に対して，$f(x)$, $|\; x - \alpha \;|$ の値は，0 以上なので，

$$\sqrt{f(x)} \;=\; |\; x - \alpha \;|$$

が成り立つ．



$D < 0$ のとき，$f(x) = 0$ の解のうち，虚部が正であるものを α とおく．すなわち，

$$\alpha := \frac{-b + \sqrt{D}}{2}$$

とする．もう一つの解は，α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ である．複素数 α の実部と虚部をそれぞれ，$\mathrm{Re}(\alpha)$, $\mathrm{Im}(\alpha)$ と書くことにする．解と係数の関係から，

$$b = -(\alpha + \overline{\alpha}) = -2\mathrm{Re}(\alpha) \qquad , \qquad c = \alpha\overline{\alpha}$$

が成り立つので，

$$D = (\alpha + \overline{\alpha})^2 - 4\alpha\overline{\alpha} = (\alpha - \overline{\alpha})^2 = \{2i\mathrm{Im}(\alpha)\}^2 = -4\{\mathrm{Im}(\alpha)\}^2$$

と書ける．ここで，i は虚数単位である．よって，

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{-D}{4}} = \sqrt{\{x - \mathrm{Re}(\alpha)\}^2 + \{\mathrm{Im}(\alpha)\}^2}$$

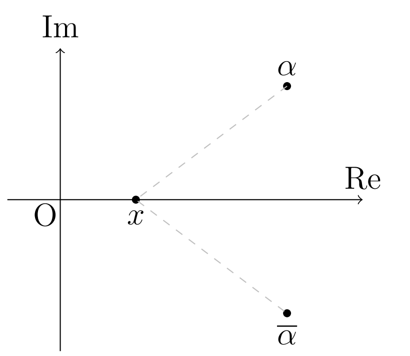
が成り立つ．上の等式の右辺は，複素数平面において，点 α と，実軸上の点 $(x, 0)$ との距離を表している．以上から，

$$\sqrt{f(x)} \;=\; |\; x - \alpha \;|$$

が成り立つ．最後に，点 $(x, 0)$ は，実軸上の点だったので，

$$|\; x - \alpha \;| = |\; x - \overline{\alpha} \;|$$

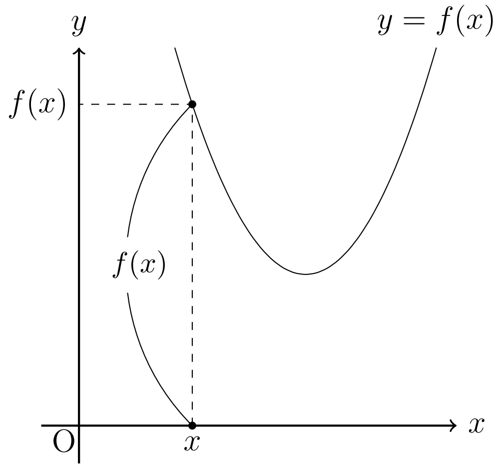
が成り立つ．これから，α として，最初に，虚部が負の方を選んでも問題はない．



□

次に，上の命題の幾何学的な意味を考えよう．$D=0$ の場合は，証明でも述べた通りなので良い．
$D<0$ のときを考える．

- $\sqrt{f(x)}$ は，二次関数 $y=f(x)$ の高さ（右図を参照）の根号をとったものであり，
- $\mid x-\alpha \mid$ は，二次方程式 $f(x)=0$ の解 α と，点 x との距離と解釈できる．

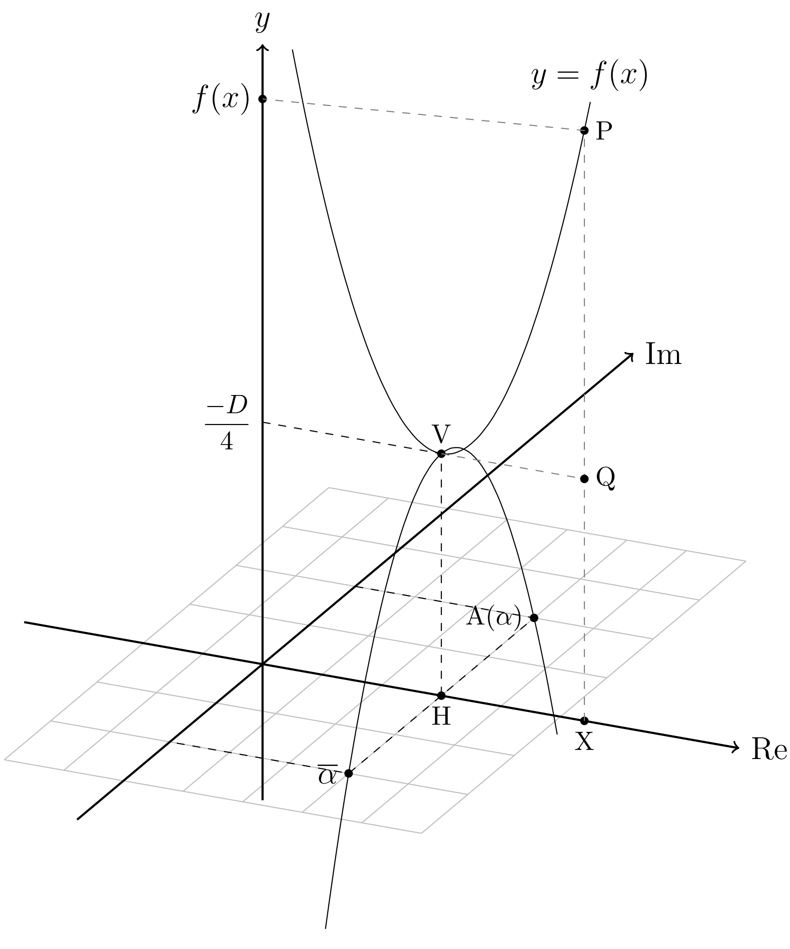


上で証明した等式

$$\sqrt{f(x)} = \mid x-\alpha \mid$$

は，これら 2 つを結びつけるものと解釈すると，とても興味深い．

まずは，虚数解 α を図示するところから始める．詳細は省略するが，$y=f(x)$ のグラフは，複素数から実数への関数[1] と見ることで，空間内に次のように描画できる．[2]



右図のように，6 点 $\mathrm{P, Q, X, V, A, H}$ をとる．V は頂点であり，A は虚数解 α を表す点である．実軸上の任意の点 $\mathrm{X}(x)$ に対して，点 $\mathrm{P, Q}$ が定まることに注意しておく．まず，

$$f(x)=\mathrm{PX}=\mathrm{PQ}+\mathrm{QX}$$

が成り立つ．また，点 P は，$y=f(x)$ 上の点なので，

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{VQ}^2=\mathrm{HX}^2$$

であり，同様に，点 A は，$y=f(x)$ 上の点なので，

$$\mathrm{QX}=\mathrm{VH}=\mathrm{AH}^2$$

が成り立つ．以上より，

$$f(x)=\mathrm{HX}^2+\mathrm{AH}^2$$

が成り立つが，直角三角形 AHX に三平方の定理を適用することで，等式，

$$\mathrm{HX}^2+\mathrm{AH}^2=\mathrm{AX}^2=\mid x-\alpha \mid^2$$

が得られ，$f(x)=\mid x-\alpha \mid^2$ が従う．

[1]定義域を複素数全体にすると，多くの場合，値域は実数の範囲に収まらない．よって，正確には，定義域を複素数全体の集合の部分集合 $A_f := \{x \in \mathbb{C} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$ に制限するということ．

[2]https://gleamath.com/illustrate-im-root/を参照．