$\sqrt{\text{２次式}}$ は平面上の距離と見れる

本稿の動機は，次のような問題を考えることである．

> 次の最小値を求めよ．
>
> $$F(x)=\sqrt{x^2-6x+10}+\sqrt{x^2-2x+5} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

〔解答〕．平面上の２点 $\mathrm{A}(a_1,a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,b_2)$ の距離の公式

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

を思い出す．

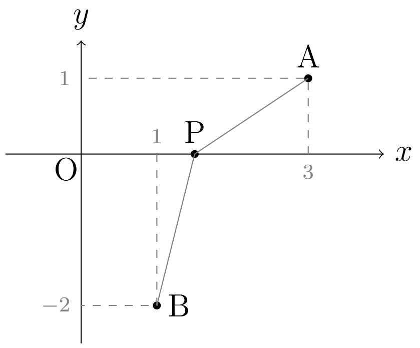
与式は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}F(x)&=\sqrt{(x-3)^2+1}+\sqrt{(x-1)^2+4}\\&=\sqrt{(x-3)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(0+2)^2}\end{aligned} \tag{1}$$

ここで，平面上の３点 P，A，B を

$$\mathrm{P}(x,0)\quad,\quad \mathrm{A}(3,1)\quad,\quad \mathrm{B}(1,-2)$$

と定めると，$F(x)$ は，線分 AP と線分 PB の長さの和として見ることができる．



よって，$F(x)$ が最小になるのは，明らかに点 P が直線 AB 上にあるときであり，そのとき

$$F(x)=\mathrm{AB}$$

である．以上から，求める最小値は，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{13}$$

となる． □

補足. 上の解答の (1) 式は，$\sqrt{(x-3)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2}$ と変形することもできる．しかしこれでは，その後の点 B を，B(1, 2) と取ることになり，２点 A, B がどちらも x 軸より上の点となってしまう．点 P は x 軸上の点であることに変わりはないので，これでは，$f(x)$ の最小値が見辛いのである．つまり，解答の (1) 式では，２点 A, B が x 軸を挟むような点として取れるように式変形しているのである．言うまでもないが，$\sqrt{(x-3)^2+(0+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2}$ としてもこれは達成される．

前の問題を少し一般化した次の問題を考える．

$j=1,2$ に対して，$f_j(x)=x^2+b_jx+c_j$ とする．このとき，次の最小値を求めよ．

$$\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)} \qquad\qquad (x\in\mathbb{R})$$

ただし，$f_j(x)$ の判別式 $D_j=b_j^2-4c_j$ の値は共に 0 以下であるとする．

注意． 判別式の値が正であれば，$\sqrt{f_j(x)}$ が複素数となる x が存在する．複素数に大小関係はないので，この仮定は問題の一般化を考える上で正当である．

〔解答〕．前の問題と同様にして，

$$\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}=\sqrt{\left(x+\frac{b_1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{-D_1}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{b_2}{2}\right)^2+\left(0+\frac{\sqrt{-D_2}}{2}\right)^2}$$

と変形できるので，求める最小値は，2 点 $\mathrm{A}\left(-\frac{b_1}{2},\frac{\sqrt{-D_1}}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(-\frac{b_2}{2},-\frac{\sqrt{-D_2}}{2}\right)$ の距離と考えられる．以上より，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{c_1+c_2+\frac{-b_1b_2+\sqrt{D_1D_2}}{2}} \tag{2}$$

を得る．□

答えの一部に，$\frac{-b_1b_2+\sqrt{D_1D_2}}{2}$ という二次方程式 $f_1(x)=0$，$f_2(x)=0$ の（虚数）解を合わせたような形が登場したのは大変興味深い．これについて考察を深めてみたい．

$j=1,2$ に対して，$f_j(x)=0$ の解のうち，虚部が正であるものを α_j とおく．ただし，$D_j=0$ の場合は，唯一の実数解を α_j とおく．すなわち，

$$\alpha_j:=\frac{-b_j+\sqrt{D_j}}{2}$$

とする．複素数 α の実部と虚部をそれぞれ，$\mathrm{Re}(\alpha)$, $\mathrm{Im}(\alpha)$ と書くことにする．解と係数の関係から，$b_j=-(\alpha_j+\overline{\alpha_j})=-2\mathrm{Re}(\alpha_j)$，$c_j=\alpha_j\overline{\alpha_j}$ が成り立つので，$D_j=(\alpha_j-\overline{\alpha_j})^2=\{2i\mathrm{Im}(\alpha_j)\}^2=-4\{\mathrm{Im}(\alpha_j)\}^2$ と書ける．ここで，i は虚数単位である．よって，

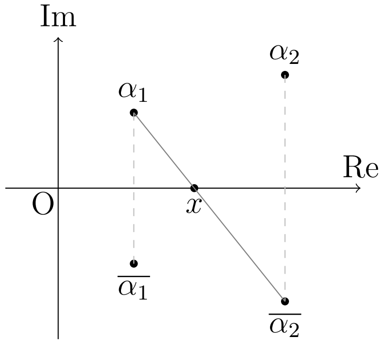
$$\sqrt{f_j(x)}=\sqrt{\left(x+\frac{b_j}{2}\right)^2+\frac{-D_j}{4}}=\sqrt{\{x-\mathrm{Re}(\alpha_j)\}^2+\{\mathrm{Im}(\alpha_j)\}^2}=\mid x-\alpha_j\mid=\mid x-\overline{\alpha_j}\mid \tag{3}$$

が成り立つ．$x\in\mathbb{R}$ に注意すると，

$$\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}=\mid x-\alpha_1\mid+\mid x-\overline{\alpha_2}\mid$$

の最小値は，次のように書ける．

$$\mid\alpha_1-\overline{\alpha_2}\mid$$



補足． きれいな形で求める最小値を書くことができたが，これは結局，複素数を用いて答えを書き換えただけであり，議論の本質は何も変わっていないことに気づくだろう．（もちろん，(2) 式を愚直に計算することでも得られる．）それよりも，$f_j(x)=0$ の解 α_j を用いて，(3) 式のような記述ができることに目を向ける方が有用であろう．これは幾何的には，虚数解を三次元（y 軸，実軸 $\mathrm{Re}(x)$，虚軸 $\mathrm{Im}(x)$ を用いて記述することで，明らかとなる事実である．