和と積の公式

三角関数の和から積に変換する公式と，逆に，積から和に変換する公式を紹介する．

（復習）加法定理

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
3. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

加法定理の公式を組み合わせて次が証明される．

積 $\to$ 和の公式

(i) $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

(ii) $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

(iii) $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

(iv) $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

証明．(i) 上で復習した加法定理 1. と 3. の両辺を足すことにより，等式

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

を得る．これから結果が従う．

(ii) 加法定理の 1. から 3. の両辺を引く事により，等式

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

を得る．これから結果が従う．

(iii) 加法定理の 2. と 4. の両辺を足すことにより，等式

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

を得る．これから結果が従う．

(ii) 加法定理の 2. から 4. の両辺を引く事により，等式

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

を得る．これから結果が従う． □

和 $\to$ 積の公式

(i) $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

(ii) $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

(iii) $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

(iv) $\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

証明．上で証明した「積 $\to$ 和の公式」において，

$$\alpha+\beta=A,\ \alpha-\beta=B \text{ とおくと，} \alpha=\frac{A+B}{2},\ \beta=\frac{A-B}{2}$$

である．よって，これらを代入して，「積 $\to$ 和の公式」(i)〜(iv) から，「和 $\to$ 積の公式」(i)〜(iv) がそれぞれ従う． □