上限定理

実数全体の集合，自然数全体の集合をそれぞれ，$\mathbb{R}, \mathbb{N}$ と表す．実数の完備性[1] とアルキメデスの公理[2] を仮定して，次の上限定理[3]を証明する．

定理 (上限定理). $\mathbb{R}$ の空でない部分集合が，上に有界ならば，上限が存在する．

証明. $X \neq \emptyset$ を $\mathbb{R}$ の上に有界な部分集合とする．X の上界全体の集合を U とすると，仮定から $U \neq \emptyset$ である．$a_1 \in X, b_1 \in U$ をとり，

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

とおく．さらに，この c_1 が U に属するか否かで，a_2, b_2 を次のように定める．

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \quad , \quad b_2 = c_1 \quad (c_1 \in U) \\ a_2 = c_1 \quad , \quad b_2 = b_1 \quad (c_1 \notin U) \end{cases}$$

以下，帰納的にして 2 つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めると，

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \tag{1}$$

が成り立つ．

このように定義した数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，Cauchy 列であり同じ値に収束することを示す．任意に $\varepsilon > 0$ を固定する．アルキメデスの公理から，$b_1 - a_1$，ε に対して，$N \in \mathbb{N}$ であって，$b_1 - a_1 < N\varepsilon$ を満たすものが存在する．また一般に，$N \leq 2^{N-1}$ が成り立つので，これと合わせて，

$$b_1 - a_1 < 2^{N-1}\varepsilon \tag{2}$$

が成り立つ．一方，(1) と c_i（$i = 1, 2, \cdots$）の定め方から，$m, n > N$ である $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$|a_m - a_n| \leq b_N - a_N = \frac{b_1 - a_1}{2^{N-1}} \tag{3}$$

が成り立ち，これと (2) を合わせて，

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

が成り立つ．よって，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，Cauchy 列であり，同様に考えて，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ も，Cauchy 列である．よって，実数の完備性から，これらは収束する．さらに (3) 式において，$N \to \infty$ を考えることにより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ が従う．よって，これらが収束することと合わせて，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値は等しいことがわかる．そこでこれを α とする．すなわち

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

とおく．

[1]実数列が収束するための必要十分条件は，Cauchy 列であることである．ここで，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が **Cauchy 列**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$m, n \geq N \Longrightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．

[2]任意の正の実数 a, b に対して，$b < Na$ をみたす $N \in \mathbb{N}$ が存在する．

[3]上限定理とは，すなわち実数の連続性公理のことである．

b_n の定め方から，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$b_n \in U$ が成り立つので，$n \to \infty$ を考えることで，任意の $x \in X$ に対して，

$$x \leq \alpha$$

が成り立つ．よって，

$$\alpha \in U$$

である．また，$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n \in \mathbb{N}$ であって，

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha$$

を満たすものが存在するが，a_n の定め方から，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n \notin U$ であるから，$\alpha - \varepsilon \notin U$ が成り立つ．よって，$\alpha \in U$ は，U の最小値なので，X の上限である．　□

系. $\mathbb{R}$ の空でない部分集合が，下に有界ならば，下限が存在する．

証明. $Y \neq \emptyset$ を $\mathbb{R}$ の下に有界な部分集合とする．Y の下界全体の集合を L とすると，仮定から，$L \neq \emptyset$ である．定義から，任意の $y \in Y$，$l \in L$ に対して，

$$y \geq l$$

が成り立つ．$\mathbb{R}$ の部分集合 X, U を

$$X = \{-y \mid y \in Y\}, \qquad U = \{-l \mid l \in L\}$$

と定めると，任意の $x \in X$，$u \in U$ に対して，$-x \in Y$，$-u \in L$ なので，

$$-x \geq -u \iff x \leq u$$

が成り立つので，X は上に有界である．よって，上限定理から X の上限 α が存在する．定義から，α は U の最小値なので，$-\alpha$ は，L の最大値である．よって，これが Y の下限となり主張が従う．　□