**定義.** **対称式**とは，複数の文字を含む整式であって，どの二つの文字を入れ替えても，もとの式と同じになるようなものの事をいう．

**定義.** $x_1, \cdots, x_n$ に対して，

$$s_k = \sum_{1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq n} x_{i_1} \cdots x_{i_n} \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

を**基本対称式**という．

**例.** $x^2yz + xy^2z + xyz^2 + 4xyz$ は対称式である．$x, y, z$ において，

$$s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + yz + zx, \quad s_3 = xyz$$

は基本対称式である．

すべての対称式は，基本対称式で表す事ができる．

証明の前にいくつか用語を定義する．

**定義.** **斉次式**とは，各項の次数がすべて等しい整式の事をいう．

**定義.** $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqq 0}$ において，ある $1 \leqq k \leqq n$ が存在して，

$$x_1 = y_1,\ \cdots,\ x_{k-1} = y_{k-1},\quad x_k < y_k$$

が成り立つとき，

$$(x_1, \cdots, x_n) \leqq (y_1, \cdots, y_n)$$

と定める．このようにして，$(x_1, \cdots, x_n)$ たちに定めた順序を**辞書式順序**という．

それでは，上の定理を証明する．

証明. 対称式を，

$$f_0(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{(i_1, \cdots, i_n) \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}} c_{i_1, \cdots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

と書く．この書き方で，文字 $x_1, \cdots, x_n$ を入れ替えることと，$i_1, \cdots, i_n$ を入れ替えることは同じであることに注意する．$(i_1, \cdots, i_n)$ を入れ替えて $(i'_1, \cdots, i'_n)$ になるとき，$c_{i_1, \cdots, i_n} = c_{i'_1, \cdots, i'_n}$ が成り立つので，

$$S_{i_1, \cdots, i_n} = \{(i'_1, \cdots, i'_n) \mid \text{入れ替えて } (i_1, \cdots, i_n) \text{ になる.}\}$$

とすると，$f_0(x_1, \cdots, x_n)$ は，

$$c_{i_1, \cdots, i_n} \sum_{(i'_1, \cdots, i'_n) \in S_{i_1, \cdots, i_n}} x_1^{i'_1} \cdots x_n^{i'_n}$$

の形の斉次式の和で書ける．よって，はじめから $f_0(x_1, \cdots, x_n)$ は斉次式であるとして良い．

$i_1 + \cdots + i_n = m$ とする．$f_0(x_1, \cdots, x_n)$ のひとつの項 $c_{i_1, \cdots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ を $(i_1, \cdots, i_n)$ の項と呼ぶ．$c_{i_1, \cdots, i_n} \neq 0$ である $(i_1, \cdots, i_n)$ のうち，辞書式順序が最大のものを $(j_1, \cdots, j_n)$ とし，$(j_1, \cdots, j_n)$ を $f_0(x_1, \cdots, x_n)$ の最大の辞書式順序と呼ぶ．

$(j_1,\cdots,j_n)$ の各数字を入れ替えた項は，すべて $f_0(x_1,\cdots,x_n)$ の項に現れるので，$f_0(x_1,\cdots,x_n)$ が対称式であることから，これらの項の係数はすべて $c_{j_1,\cdots,j_n}$ に等しい．また $(j_1,\cdots,j_n)$ が最大の辞書式順序であることから，$j_1 \geqq \cdots \geqq j_n$ である．基本対称式 $s_1,\cdots,s_n$ を用いて，

$$f_1(x_1,\cdots,x_n) = f_0(x_1,\cdots,x_n) - c_{j_1,\cdots,j_n} s_1^{j_1-j_2} s_2^{j_2-j_3} \cdots s_{n-1}^{j_{n-1}-j_n} s_n^{j_n}$$

とおくと，$f_0(x_1,\cdots,x_n), s_1,\cdots,s_n$ は対称式なので，$f_1(x_1,\cdots,x_n)$ は対称式である．また，$c_{j_1,\cdots,j_n} s_1^{j_1-j_2} s_2^{j_2-j_3} \cdots s_{n-1}^{j_{n-1}-j_n} s_n^{j_n}$ には，$(j_1,\cdots,j_n)$ の各数字を入れ替えた項がすべて現れるので，$f_1(x_1,\cdots,x_n)$ の最大の辞書式順序は，$(j_1,\cdots,j_n)$ より小さい．$m$ は有限の値なので，帰納的にして，ある $k$ が存在して，$f_k(x_1,\cdots,x_n) = 0$ が成り立つことが分かる． □

**例.** 対称式 $a^3bc + ab^3c + abc^3 + ab + bc + ca$ を基本対称式で表す．

$$f_0(a,b,c) = a^3bc + ab^3c + abc^3 + ab + bc + ca$$

とおく．$f_0(a,b,c)$ の最大の辞書式順序は，$(3,1,1)$ である．よって，

$$f_1(a,b,c) = f_0(a,b,c) - c_{3,1,1} s_1^{3-1} s_2^{1-1} s_3^1$$

とおき，計算すると，

$$\begin{aligned} f_1(a,b,c) &= f_0(a,b,c) - s_1^2 s_3 \\ &= a^3bc + ab^3c + abc^3 + ab + bc + ca - (a+b+c)^2 abc \\ &= -2a^2b^2c - 2a^2bc^2 - 2a^2b^2c + ab + bc + ca \end{aligned}$$

を得る．$f_1(a,b,c)$ の最大の辞書式順序は，$(2,2,1)$ である．よって，

$$f_2(a,b,c) = f_1(a,b,c) - c_{2,2,1} s_1^{2-2} s_2^{2-1} s_3^1$$

とおき，計算すると，

$$\begin{aligned} f_2(a,b,c) &= f_1(a,b,c) + 2s_2 s_3 \\ &= -2a^2b^2c - 2a^2bc^2 - 2a^2b^2c + ab + bc + ca + 2(ab+bc+ca)abc \\ &= ab + bc + ca \end{aligned}$$

を得る．$f_2(a,b,c)$ の最大の辞書式順序は，$(1,1,0)$ である．よって，

$$f_3(a,b,c) = f_2(a,b,c) - c_{1,1,0} s_1^{1-1} s_2^{1-0} s_3^0$$

とおき，計算すると，

$$\begin{aligned} f_3(a,b,c) &= f_2(a,b,c) - s_2 \\ &= ab + bc + ca - (ab+bc+ca) \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned} f_0(a,b,c) &= s_1^2 s_3 + f_1(a,b,c) \\ &= s_1^2 s_3 - 2s_2 s_3 + f_2(a,b,c) \\ &= s_1^2 s_3 - 2s_2 s_3 + s_2 + f_3(a,b,c) \\ &= s_1^2 s_3 - 2s_2 s_3 + s_2 \end{aligned}$$

が成り立つ．