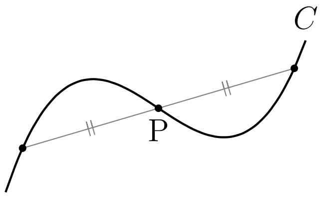
３次関数の対称性

本稿では，３次関数の対称性について考察する．まずは次の命題を証明する．

命題. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ とする．このとき，次が成り立つ．

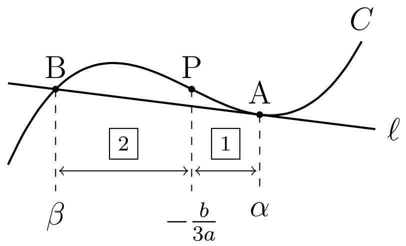
- 曲線 $C : y = f(x)$ は，変曲点 $\mathrm{P}\left(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a})\right)$ に関して対象である．



- 曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ における接線 ℓ が，A とは異なる点 $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ で，曲線 C と交わっているとする．このとき，

$$\frac{2\alpha + \beta}{3} = -\frac{b}{3a}$$

が成り立つ．すなわち，線分 AB を $1:2$ に内分する点の x 座標と，変曲点 P の x 座標が一致する．



証明. まずは，変曲点[1] を求める．$f(x)$ の一次導関数と二次導関数はそれぞれ，

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \qquad f''(x) = 6ax + 2b$$

と求められるので，これから $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$ が従う．ここで，$a \neq 0$ から，$f''(x)$ は傾きが 0 でない一次関数なので，$x = -\frac{b}{3a}$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わる．よって，（$f(x)$ が極値を持たない場合を含めて，）$\mathrm{P}\left(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a})\right)$ は，曲線 $y = f(x)$ 上の変曲点である．

曲線 $C : y = f(x)$ を適当に平行移動させて，曲線の方程式を

$$C_g : y = g(x), \qquad g(x) := ax^3 + px$$

のような形にできる[2]．平行移動によって，グラフの形は変わらないので，対称性を調べるだけなら，曲線 C_g を考えれば十分である．容易にわかるように，C_g 上の変曲点は，原点であり，任意の x に対して，

$$g(-x) = -ax^3 - px = -g(x)$$

が成り立つので，C_g は，原点対称である．よって，１つ目の主張が従う．

２つ目の主張を証明する．上と同様に，C を平行移動させた曲線 C_g を考え，この平行移動によって，C 上の点 A, B が写る C_g 上の点をそれぞれ，

$$\mathrm{A}_g(\alpha_g, g(\alpha_g)) \qquad \mathrm{B}_g(\beta_g, g(\beta_g))$$

とする[3]．上で述べたように C_g 上の変曲点は原点なので，このとき，$2\alpha_g + \beta_g = 0$ を示せば良い．

---

[1] https://gleamath.com/derivative-test02/

[2] 具体的には，$f(x - \frac{b}{3a}) = ax^3 - \frac{b^2-3ac}{3a}x + \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^2}$ と計算できるので，$y = f(x)$ を，x 軸方向に $\frac{b}{3a}$，y 軸方向に $\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^2}$ だけ，平行移動させた曲線が，$y = g(x)$ であり，上の式において，$p = -\frac{b^2-3ac}{3a}$ である．

[3] 具体的には，$\alpha_g = \alpha + \frac{b}{3a}$，$\beta_g = \beta + \frac{b}{3a}$ である．

点 A_g における接線の方程式を $\ell_g : y = sx + t$ とすると，直線 ℓ_g は，C_g と点 A_g で接し，点 B_g で交わっているので，

$$g(x) - (sx + t) = a(x - \alpha_g)^2(x - \beta_g)$$

と因数分解できる．この等式の両辺の x^2 の項の係数を比較することにより，等式

$$0 = -a(2\alpha_g + \beta_g)$$

を得る．$a \neq 0$ なので，主張が従う． $\square$

....

上の命題において，3 次関数の極値点における接線を考えることによって，その対称性が見やすくなる．関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ が極値を持つとする．3 次関数が極値を持てば，必ず極大値と極小値が存在するので，曲線 $C : y = f(x)$ における 2 つの極値点を

$$\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha)), \qquad \mathrm{A}'(\alpha', f(\alpha'))$$

とする．点 A, A' における接線と，曲線 C との交点をそれぞれ，

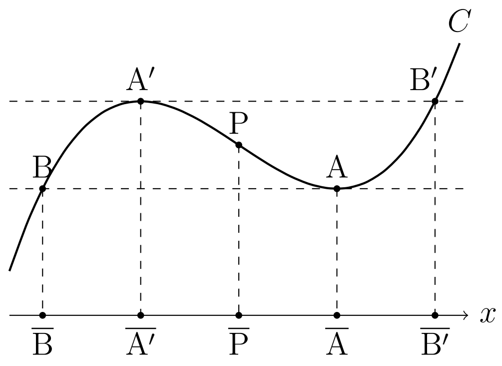
$$\mathrm{B}(\beta, f(\beta)), \qquad \mathrm{B}'(\beta', f(\beta'))$$

とする．さらに，C 上の変曲点を $\mathrm{P}\left(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a})\right)$ とする．このとき次が成り立つ．

命題. 上の記号を用いる．5 点 B, A', P, A, B' を x 軸上に射影した点

$$\overline{\mathrm{B}}(\beta, 0),\ \overline{\mathrm{A}'}(\alpha', 0),\ \overline{\mathrm{P}}\left(-\frac{b}{3a}, 0\right),\ \overline{\mathrm{A}}(\alpha, 0),\ \overline{\mathrm{B}'}(\beta', 0)$$

は，等間隔で並んでいる．



証明. 上の命題と同様に，$f(x)$ を適当に平行移動させた曲線で考えても良いので，はじめから，$b = 0$ としても一般性を失わない．このとき，$-\frac{b}{3a} = 0$ なので，$\overline{\mathrm{P}}$ は原点に位置している．よって，上の命題から，

$$2\alpha + \beta = 0, \qquad 2\alpha' + \beta' = 0$$

が成り立つ．さらに C が，変曲点に関して対称であることから，

$$\alpha' = -\alpha, \qquad \beta' = -\beta$$

が成り立つ．これらから結果が従う． $\square$