４次関数の対称性

４次関数の対称性について考察する．まずは，基本事項を復習する．４次関数

$$y = f(x), \qquad f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (a \neq 0) \tag{1}$$

が複接線[1] を持つための必要十分条件[2] は，

$$3b^2 - 8ac > 0$$

が成り立つことであり，複接線定理[3] から，複接線の傾きは，$f'''(\gamma) = 0$ を満たす γ を用いて，

$$f'(\gamma)$$

と書けるのであった．また，異なる２つの接点を $(\alpha, f(\alpha))$，$(\beta, f(\beta))$ とすると，$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ が成り立つのであった．

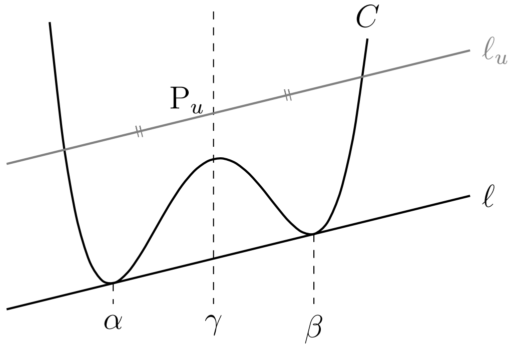
命題. 上の記号をそのまま用いる．
４次関数 $C : y = f(x)$ は，複接線 ℓ を持つとする．任意の u に対して，ℓ と傾きが等しい直線 ℓ_u:

$$y = \ell_u(x), \qquad \ell_u(x) = f'(\gamma)x + u$$

を考える．C と ℓ_u が共有点を持つとき，その共有点と，点

$$\mathrm{P}_u(\gamma, \ell_u(\gamma))$$

に関して対称である点も共有点のうちの１つである．



証明. 対称性を考えるだけなので，曲線 C を適当に平行移動して，はじめから，

$$y = f(x), \qquad f(x) = ax^4 + px^2 + qx \tag{2}$$

という形の４次関数を考えても良い[4]．このとき，１次導関数と３次導関数は，

$$f'(x) = 4ax^3 + 2px + q, \qquad f'''(x) = 24ax$$

なので，$x = \gamma$ に対応する点は $x = 0$ であり，$\ell_u(x)$ と，P_u は，それぞれ，

$$\ell_u(x) \;=\; f'(0)x + u \;=\; qx + u, \qquad \mathrm{P}_u(0, u)$$

と書ける．曲線 C と直線 ℓ_u の共有点の１つを $\mathrm{A}(\delta, f(\delta))$ とすると，点 P_u に関して，A と対称である点 B の x 座標は，$-\delta$ であり，仮定から，$f(\delta) - \ell_u(\delta) = 0$ が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned} f(-\delta) - \ell_u(-\delta) &= a\delta^4 + p\delta^2 - q\delta - (-q\delta + u) \\ &= a\delta^4 + p\delta^2 + q\delta - (q\delta + u) \\ &= f(\delta) - \ell_u(\delta) \qquad\qquad = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

と計算できるので，点 B も C と ℓ_u の共有点のうちの１つである． □

[1] 異なる２つの点で接する接線のこと．

[2] https://gleamath.com/double-tangent-of-quartic-function/

[3] https://gleamath.com/double-tangent-thm/

[4] 具体的には，$f\left(x - \frac{b}{4a}\right) - \frac{-3b^4+16ab^2c-64a^2bd+256a^3e}{256a^3} = ax^4 + \frac{-3b^2+8ac}{8a}x^2 + \frac{2b^3-8abc+16a^2d}{16a^2}x$ と計算できるので，$y = f(x)$ を，x 軸方向に $\frac{b}{4a}$，y 軸方向に $\frac{-3b^4+16ab^2c-64a^2bd+256a^3e}{256a^3}$ だけ平行移動させた曲線をまた $y = f(x)$ として考えている．最初の記号との対応は，$p = \frac{-3b^2+8ac}{8a}$，$q = \frac{2b^3-8abc+16a^2d}{16a^2}$ である．

上の命題で，4 次関数の対称性には，複接線と同じ傾きを持つ直線 $y = f'(\gamma)x + u$ が，大きく影響していることをみた．しかし，その証明では，4 次関数が複接線を持つという事実は用いられていない．つまり，対象の 4 次関数が，複接線を持たない場合でも

- $f'''(x) = 0$ は，1 次方程式なので，ただ 1 つの解 $x = \gamma$ を持つし，
- 対称性を考えるだけなら，適当に平行移動した直線を考えれば良いし，
- 点 P_u に関して，交点 A と対称である点 B に対して，計算 (3) も同様に行えるのである．

以上から，複接線を持たない 4 次関数に対しても，同様の結果が成り立つことが分かる．

命題. （複接線を持つとは限らない）4 次関数 $C : y = f(x)$ に対して，$f'''(x) = 0$ のただ 1 つの解を $x = \gamma$ とし，任意の u に対して，傾きが $f'(\gamma)$ である直線 ℓ_u:

$$y = \ell_u(x), \qquad \ell_u(x) = f'(\gamma)x + u$$

を考える．C と ℓ_u が共有点を持つとき，その共有点と，点

$$\mathrm{P}_u(\gamma, \ell_u(\gamma))$$

に関して対称である点も共有点のうちの 1 つである．

以上の命題から，4 次関数が，直線 $x = \gamma$ に対して，線対称になるためには，（複接線を持つ場合であればその傾き）$f'(\gamma)$ が 0 であることが必要十分であることが分かる．4 次関数の一般形 (1) との関係をみるために，前項の注釈に記載した平行移動を詳しく追うと，次のようになる．

4 次関数 (1)

$$f(x) = ax^4 + b^3 + cx^2 + dx + e$$
$$\gamma = -\frac{b}{4a}$$

$\longrightarrow$ 平行移動 $\longrightarrow$

x : $\frac{b}{4a}$

y : $\frac{-3b^4+16ab^2c-64a^2bd+256a^3e}{256a^3}$

4 次関数 (2)

$$f(x) = ax^4 + px^2 + qx$$
$$p = \frac{-3b^2+8ac}{8a}$$
$$q = \frac{2b^3-8abc+16a^2d}{16a^2}$$
$$\gamma = 0$$

よって，

$$f'(\gamma) = q = \frac{2b^3 - 8abc + 16a^2d}{16a^2} = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^2}$$

であり，$a \neq 0$ であったので，

$$f'(\gamma) = 0 \iff b^3 - 4abc + 8a^2d = 0$$

が成り立つ．

命題. 4 次関数 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $(a \neq 0)$ に対して，曲線 $y = f(x)$ が線対称となるための必要十分条件は，

$$b^3 - 4abc + 8a^2d = 0$$

が成り立つことである．またこのとき，$y = f(x)$ は，直線 $x = -\dfrac{b}{4a}$ に関して線対称である．