円の接線の方程式

円の接線に関する公式を２通りの方法で証明する．

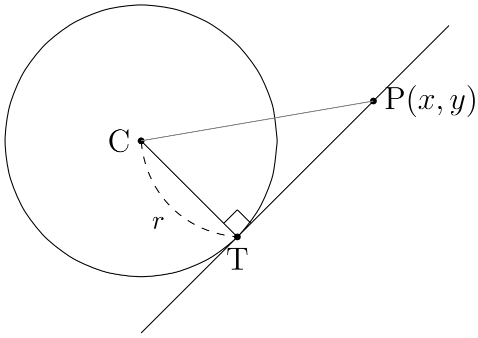
円の接線の方程式

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は，

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

である．

証明．円の中心を $\mathrm{C}(a,b)$，接点を $\mathrm{T}(x_1,y_1)$ とする．
求める接線上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y)$ をとる．$\mathrm{P}\neq\mathrm{T}$ であれば，CT と PT は，直角に交わるので，直角三角形 CTP に三平方の定理を適用することで，等式



$$\mathrm{PC}^2=r^2+\mathrm{PT}^2$$

を得る．２点間の距離の公式から

$$\begin{aligned}\mathrm{PC}^2 &= (x-a)^2+(y-b)^2,\\ \mathrm{PT}^2 &= (x-x_1)^2+(y-y_1)^2\end{aligned}$$

が成り立つので，これらを代入して計算することで，等式

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2=r^2 \tag{1}$$

を得る．ここで，左辺の第１項と第３項は，

$$\begin{aligned}(x-a)^2-(x-x_1)^2 &= (2x-x_1-a)(x_1-a)\\ &= \{2x-2a-(x_1-a)\}(x_1-a)=2(x-a)(x_1-a)-(x_1-a)^2\end{aligned}$$

と計算でき，第２項と第４項も同様に，

$$(y-b)^2-(y-y_1)^2=r^2=2(y-b)(y_1-b)-(y_1-b)^2$$

と計算できる．よって，(1) は，

$$\begin{aligned}2(x-a)(x_1-a)-(x_1-a)^2+2(y-b)(y_1-b)-(y_1-b)^2=r^2\\ 2(x-a)(x_1-a)+2(y-b)(y_1-b)=r^2+(x_1-a)^2+(y_1-b)^2\end{aligned}$$

と計算できる．ここで，点 $\mathrm{T}(x_1,y_1)$ は，円周上の点であったので，

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$$

が成り立つ．これを代入して，両辺を２で割ることにより，等式

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2 \tag{2}$$

が得られる．また，この等式に $(x,y)=(x_1,y_1)$ を代入しても等号が成り立つことが確認できるので，接点 $\mathrm{T}(x_1,y_1)$ もこの直線上の点である．よって，(2) 式が求める接線の方程式である．　□

特に，中心が原点の円に対しては，次のようになる．

中心が原点の円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x_1,y_1) における接線の方程式は，　$x_1x+y_1y=r^2$　である．

次に別の証明を紹介しよう[1]．

証明. 円の中心を $\mathrm{C}(a,b)$，接点を $\mathrm{T}(x_1,y_1)$ とする．

- $x_1 \neq a$ かつ $y_1 \neq b$ のとき
  直線 CT の傾きは，
  $$\frac{y_1-b}{x_1-a}$$
  である．求める接線は，直線 CT と垂直に交わるので，その傾きは，
  $$-\frac{x_1-a}{y_1-b}$$
  である．さらに，$\mathrm{T}(x_1,y_1)$ を通ることから，求める接線の方程式は，
  $$y-y_1=-\frac{x_1-a}{y_1-b}(x-x_1)$$
  と求められる．これを変形して，
  $$(x-x_1)(x_1-a)+(y-y_1)(y_1-b)=0 \tag{3}$$
  が得られる．ここで，点 $\mathrm{T}(x_1,y_1)$ は，円周上の点であったので，
  $$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2 \tag{4}$$
  が成り立つ．(3) の両辺に (4) の両辺をそれぞれ足すことで，
  $$\begin{aligned}(x-x_1)(x_1-a)+(x_1-a)^2+(y-y_1)(y_1-b)+(y_1-b)^2&=r^2\\(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)&=r^2\end{aligned}$$
  と計算でき，これが求める方程式である．

- $x_1=a$ かつ $y_1 \neq b$ のとき
  直線 CT は，y 軸に平行なので，求める接線は，x 軸に平行である．さらに，$\mathrm{T}(x_1,y_1)$ を通ることから，求める接線の方程式は，
  $$y=y_1 \tag{5}$$
  と求められる．これが，期待していた方程式と同じであることを証明する．今の場合，$x_1-a=0$，$r^2=(y_1-b)^2$ であることに注意すると，
  $$\begin{aligned}(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)&=r^2\\(y_1-b)(y-b)&=(y_1-b)^2\\y-b&=y_1-b\\y&=y_1\end{aligned}$$
  となり，(5) が得られる．

- $x_1 \neq a$ かつ $y_1=b$ のときも，x と y の役割を入れ替えるだけで上と同様に証明できる．

- $x_1=a$ かつ $y_1=b$ のときは，2 点 C，T が同じ点となり，この場合はあり得ない．

□

[1] 愚直に計算するだけなので，場合わけも多くなり面倒であるが，高校数学では，点の軌跡を学習する前に，円の接線の方程式を学習するため，こちらの方法が紹介されることが多い．