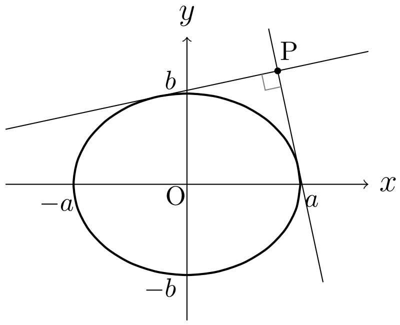
楕円の外から引いた接線の直交条件

命題. 楕円 $E : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ において，E の外側にある点 $\mathrm{P}(p, q)$ を通り E に接する 2 本の直線が，直交する条件は，

$$a^2 + b^2 = p^2 + q^2$$

が成り立つことである.



証明. 点 P が，$(\pm a, \pm b)$ のときは，明らかに 2 本の接線は直交するが，この場合は，命題の条件を満たすので良い．以下では，点 P がこの 4 点以外の場合を考える.

点 P を通る直線を ℓ とし，その傾きを $m \neq 0$ とすると，ℓ の方程式は，次のように表せる.

$$\begin{aligned} y - q &= m(x - p) \\ y &= mx - pm + q \qquad (1) \end{aligned}$$

ここで，簡単のため $c = -pm + q$ とおく．直線 $\ell : y = mx + c$ と，楕円 E の交点は，連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + c \end{cases}$$

の解であるから，y を消去することにより，x の二次方程式

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2(mx + c)^2 &= a^2b^2 \\ (b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2cmx + a^2(c^2 - b^2) &= 0 \end{aligned}$$

が得られる．ℓ と E が接するための条件は，この 2 次方程式の判別式

$$\begin{aligned} D/4 &= (a^2cm)^2 - a^2(b^2 + a^2m^2)(c^2 - b^2) \\ &= a^4c^2m^2 - a^2(b^2c^2 - b^4 + a^2c^2m^2 - a^2b^2m^2) \qquad (2) \\ &= a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - c^2) \qquad (3) \end{aligned}$$

が 0 であることなので，これから，$c = -pm + q$ に注意して，m の二次方程式

$$\begin{aligned} a^2m^2 + b^2 - (-pm + q)^2 &= 0 \\ (a^2 - p^2)m^2 + 2pqm + (b^2 - q^2) &= 0 \qquad (4) \end{aligned}$$

が得られる．これを解くことで，点 P を通り，楕円 E に接する 2 本[1] の直線の傾きが得られるが，この 2 本の直線が直交するための条件は，傾きの積が -1 となることであり，解と係数の関係から，これは，

$$\frac{b^2 - q^2}{a^2 - p^2} = -1$$

が成り立つことは同値である．よって，主張が従う. □

注意. 上の証明において，c は m の 1 次式としていたので，判別式の計算仮定における (2) 式は，見かけ上は m の 4 次式であることに注意する．しかし，実際には，m の 4 次と 3 次の項が，相殺されて，(3) 式のように m の 2 次式に落ち着くのである．この部分の煩雑な計算を少しでも解消するために，$c = -pm + q$ とおいたのである.

---

[1] m の 2 次方程式 (4) の判別式の値は，P が E の外側の点であることに注意すると，次のように評価できる.

$$p^2q^2 - (a^2 - p^2)(b^2 - q^2) = a^2b^2\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - 1\right) > 0$$