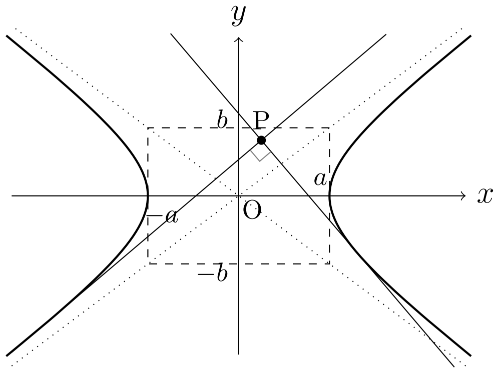
双曲線の外部の点から引いた接線の直交条件

命題. 双曲線 $H: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ において，H の外側にある点 $\mathrm{P}(p, q)$ を通り H に接する 2 本の直線が（引けるときこの直線が）直交する条件は，

$$a^2 - b^2 = p^2 + q^2, \quad q \neq \pm\frac{b}{a}p$$

が成り立つことである．



証明．点 P を通る直線を ℓ とする．点 P が，直線 $x = \pm a$ 上にあるときは，双曲線の頂点を通る接線が 1 本引けるが，この接線に直交する直線（x 軸と平行な直線）は，明らかに双曲線の接線ではない．また，このときは，$p^2 = a^2$, $b \neq 0$ から命題の条件を満たさないことが確認できる．よって，この場合は除くことができる．ℓ の傾きを $m \neq 0$ とすることで，ℓ の方程式を

$$\begin{aligned} y - q &= m(x - p) \\ y &= mx - pm + q \qquad (1) \end{aligned}$$

と表せる．ℓ が，H の漸近線 $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ と平行であることはないので，さらに $m \neq \pm\frac{b}{a}$ も仮定する．ここで，簡単のため $c = -pm + q$ とおく．直線 $\ell: y = mx + c$ と，双曲線 H の交点は，連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + c \end{cases}$$

の解であるから，y を消去することにより，x の 2 次方程式[1]

$$\begin{aligned} b^2x^2 - a^2(mx + c)^2 &= a^2b^2 \\ (b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2cmx - a^2(c^2 + b^2) &= 0 \end{aligned}$$

が得られる．ℓ と E が接するための条件は，この 2 次方程式の判別式

$$\begin{aligned} D/4 &= (-a^2cm)^2 + a^2(b^2 - a^2m^2)(c^2 + b^2) \\ &= a^4c^2m^2 + a^2(b^2c^2 + b^4 - a^2c^2m^2 - a^2b^2m^2) \qquad (2) \\ &= a^2b^2(-a^2m^2 + b^2 + c^2) \qquad (3) \end{aligned}$$

が 0 であることなので，これから，$c = -pm + q$ に注意して，m の 2 次方程式[2]

$$\begin{aligned} -a^2m^2 + b^2 + (-pm + q)^2 &= 0 \\ (-a^2 + p^2)m^2 - 2pqm + (b^2 + q^2) &= 0 \qquad (4) \end{aligned}$$

が得られる．ここで，2 本の接線が直交するための条件は，傾きの積が -1 となることであり，解と係数の関係から，これは，

$$\frac{b^2 + q^2}{-a^2 + p^2} = -1$$

が成り立つことと同値である[3]．よって，主張の等式が得られる．ただし，上でも述べたように，点 P が H の漸近線上にある場合は条件を満たさないので，$q = \pm\dfrac{b}{a}p$ である場合は覗かなければならない． □

---

[1] $m \neq \pm\frac{b}{a}$ という仮定から，$b^2 - a^2m^2 \neq 0$ である．

[2] $p^2 \neq a^2$ という仮定から，$-a^2 + p^2 \neq 0$ である．

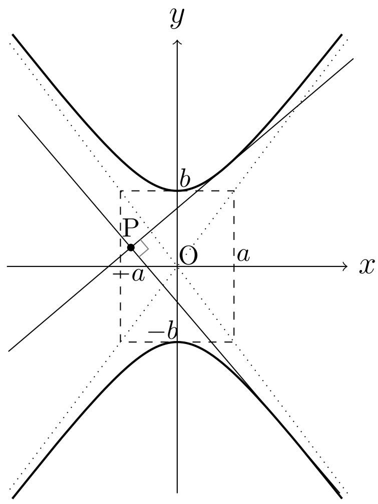
[3] 一般に，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ において，$\frac{c}{a} < 0$ なら，$b^2 - 4ac > 0$ が成り立つため，2 つの解の積の値が負なら，その解は異なる 2 つの実数解である．（下の補足も参照）

焦点が y 軸上にある双曲線についても同様の結果が得られる．

命題． 双曲線 $H' : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ において，H' の外側にある点 $\mathrm{P}(p, q)$ を通り H' に接する 2 本の直線が（引けるときこの直線が）直交する条件は，

$$-a^2 + b^2 = p^2 + q^2, \quad q \neq \pm\frac{b}{a}p$$

が成り立つことである．



証明．双曲線 H' の方程式は，

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

と変形できるので，(x, a, p) と (y, b, q) の役割をそれぞれ入れ替えて，上の命題と同様に計算することにより，条件

$$b^2 - a^2 = q^2 + p^2, \qquad p \neq \pm\frac{a}{b}q$$

が得られる．これは，主張の条件と同じである． □

命題から，a と b の大小関係によって，直交する 2 接線が存在しない場合もあることがわかる．

系．
- 双曲線 $H : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ において，$0 < a < b$ なら，直交する 2 接線は存在しない．
- 双曲線 $H' : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ において，$0 < b < a$ なら，直交する 2 接線は存在しない．

証明．双曲線 H において，直交する 2 接線が引けると仮定し，その交点を $\mathrm{P}(p, q)$ とすると，上の命題の条件と，$0 < a < b$ という仮定から

$$p^2 + q^2 = a^2 - b^2 < 0$$

が得られるがこれは矛盾である． □

補足． 最初の命題の m の 2 次方程式 (4) が異なる 2 の実数解を持つための条件は，その判別式の値が正になること，すなわち，

$$p^2q^2 - (-a^2 + p^2)(b^2 + q^2) = a^2b^2 + a^2q^2 - p^2b^2 > 0$$

$$\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} < 1 \tag{5}$$

が成り立つことである．不等式 (5) の形から，命題の条件を満たす P は，双曲線で分けられる 3 つの領域のうち，原点を含む領域に位置していなければならないこともわかる．これは，（直交するとは限らない）異なる 2 接線が引けるための必要条件であるが，グラフから得られるイメージと合っていると思う．