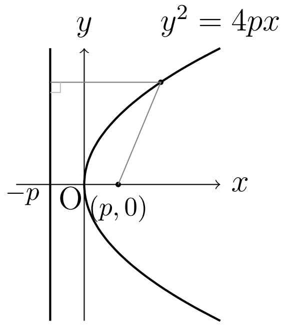
放物線の準線と直交する2接線

座標平面において，**放物線**は，定点 F と，F を通らない定直線 ℓ からの距離が等しい点の軌跡として定義される．このとき，定点 F と定直線 ℓ をそれぞれ，放物線の**焦点**と**準線**というのであった．準線が座標軸と平行である場合には，放物線の方程式は次のように表せることが知られている[1]．以下では，$p, q \neq 0$ とする．



- 焦点 $(p, 0)$ と，準線 $x = -p$ で定義される放物線の方程式は，次のように表せる：
$$y^2 = 4px.$$
- 焦点 $(0, q)$ と，準線 $y = -q$ で定義される放物線の方程式は，次のように表せる：
$$x^2 = 4qy.$$

逆に放物線[2]に対して，その準線は次のように定めることができる．

命題. $p, q \neq 0$ とする．

- 放物線 $C : y^2 = 4px$ の直交する 2 接線の交点 P の奇跡は，準線 $x = -p$ である．
- 放物線 $C' : x^2 = 4qx$ の直交する 2 接線の交点 Q の奇跡は，準線 $y = -q$ である．

証明．どちらも同じなので，放物線 $C : y^2 = 4px$ に関する主張のみを証明する．点 $\mathrm{P}(s, t)$ とする．P が y 軸上にあるときは，C の頂点を通る接線が引けるが，これと直交する直線は，C の接線ではあり得ないので，この場合は除く．点 P を通る接線 ℓ の傾きを $m \neq 0$ とすると，ℓ の方程式は，

$$\begin{aligned} y - t &= m(x - s) \\ y &= mx - sm + t \end{aligned}$$

と表せる．ここで簡単のため $u = -sm + t$ とおくと，$\ell : y = mx + u$ である．これと放物線の方程式から y を消去することで，x の二次方程式

$$\begin{aligned} (mx + u)^2 &= 4px \\ m^2x^2 + 2(mu - 2p)x + u^2 &= 0 \end{aligned}$$

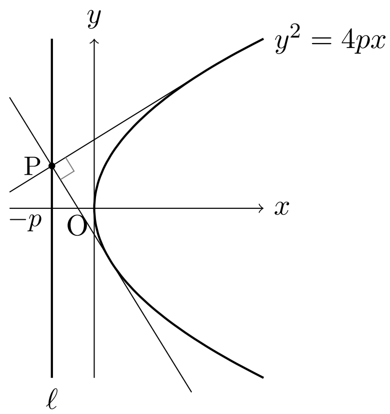
を得る．ℓ が C の接線であることと，この方程式が重解を持つことは同値なので，判別式の値を計算することで m の二次方程式

$$\begin{aligned} (mu - 2p)^2 - m^2u^2 &= 0 \\ 4p(-mu + p) &= 0 \\ 4p(sm^2 - tm + p) &= 0 \end{aligned}$$

が得られる．解と係数の関係から，2 接線が直交することと，

$$\frac{p}{s} = -1 \iff s = -p$$

であることは同値である．s は点 P の x 座標であったので，求める奇跡は，準線 $x = -p$ である．



□

[1] https://gleamath.com/parabola/
[2] ここでは，頂点を原点に持つ放物線のみを考える．