ボルツァァーノ・ワイエルシュトラスの定理

区間縮小法[1]とアルキメデスの公理[2] を仮定して，Bolzano-Weierstrass の定理を証明する．主張を述べるためにまずは言葉を定義する．

定義．
- 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**狭義単調増加**とは，全ての自然数 n に対して，$b_n < b_{n+1}$ が成り立つときをいう．
- 自然数 n_k を項とする狭義単調増加数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ をとる．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ をその**部分列**という．

例． $n_k = 2k-1$ とおく．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ すなわち，

$$a_1, a_3, a_5, a_7, \cdots$$

という数列は，部分列である．

定理 (Bolzano-Weierstrass)．有界な数列は，収束する部分列をもつ．

証明． 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であるとする．このとき，ある実数 m_1, M_1 が存在して，全ての自然数 n に対して，

$$m_1 \le a_n \le M_1,$$

が成り立つ．すなわち，$I_1 = [m_1, M_1]$ とすると，$a_n \in I_1$ が成り立つ．次に $c = \dfrac{m_1 + M_1}{2}$ とおき，２つの閉区間

$$[m_1, c_1], [c_1, M_1] \subset I_1$$

を考えると，$[m_1, c_1], [c_1, M_1]$ のどちらか少なくとも一方には，無限に多くの a_n が含まれる[3]．もし，$[m_1, c_1]$ に無限に多くの a_n が含まれているなら，

$$m_2 = m_1, \qquad M_2 = c_1$$

とし，そうでなければ（$[c_1, M_1]$ に無限に多くの a_n が含まれているので,），

$$m_2 = c_1, \qquad M_2 = M_1$$

として，閉区間 $I_2 = [m_2, M_2]$ を定義すれば，I_2 には無限に多くの a_n が含まれる．

以下，同様にして，数列 $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定義し，閉区間 $I_n = [m_n, M_n]$ を定義すると，その作り方から，全ての自然数 n に対して，

$$I_{n+1} \subset I_n \tag{1}$$

が成り立つ．さらに，

$$M_n - m_n = \frac{M_{n-1} - m_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{M_1 - m_1}{2^{n-1}} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (n \to \infty) \tag{2}$$

---

[1] 閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ において，全ての I_n の共通部分を I とする．このとき，$I_{n+1} \subset I_n$ かつ，$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ が成り立つなら，$I = \{\alpha\}$，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ が成り立つ．

[2] 任意の正の実数 a, b に対して，$b < Na$ をみたす自然数 N が存在する．

[3] 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各項の値全体の集合を A とすると，$\{(a_n, n) \in A \times \mathbb{N} \mid a_n \in [m_1, c_1]\}$ と $\{(a_n, n) \in A \times \mathbb{N} \mid a_n \in [c_1, M_1]\}$ のどちらか少なくとも一方は無限集合であるということ．どちらも有限集合なら，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有限数列となり矛盾する．

が成り立つので，

$$\lim_{n\to\infty}(M_n - m_n) = 0 \tag{3}$$

である．(1)，(3) より，閉区間 $I_n = [m_n, M_n]$ に区間縮小法を適用することができ，これから，ある実数 α が存在して，

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} M_n = \alpha \tag{4}$$

をみたし，全ての I_n の共通部分は，$\{\alpha\}$ であることがわかる．

再び閉区間 I_n の作り方から，各 I_n には無限に多くの a_n が含まれているので，自然数 n_k を項とする狭義単調増加数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ を

$$a_{n_k} \in I_k = [m_k, M_k]$$

を満たすようにとることができる[4]．このとき，

$$m_k \leq a_{n_k} \leq M_k$$

であり，(4) と，はさみうちの原理から，

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$$

が成り立つ．このようにして数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ をとることができる． □

…………………………………………………………………………………………

注意. 証明中の (2) において，アルキメデスの公理が用いられていることに注意する．つまり，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \tag{5}$$

は，区間縮小法を仮定するだけでは証明することができないのである[5]．詳しくは次の通りである．

命題. （アルキメデスの公理を仮定すると，）上の注意の (5) が成り立つ．

証明．まず，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{6}$$

を示す．$\varepsilon > 0$ を固定する．アルキメデスの公理から，$1, \dfrac{1}{\varepsilon}$ に対して，自然数 N であって，

$$\frac{1}{\varepsilon} < N \cdot 1 = N$$

を満たすものが存在する．よって，$n > N$ を満たす全ての自然数 n に対して，

$$n > N \Longrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

が成り立つので，(6) が従う．

次に，全ての自然数に対して，$n < 2^n$ なので[6]，

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$$

が成り立つ．よって，(6) と，はさみうちの原理から，(5) が従う． □

---

[4] $a_{n_{k-1}} \in I_{k-1}$ に対して，ある自然数 $N > n_{k-1}$ であって，$a_N \in I_k$ を満たすようなものが存在しないとすると，I_k には，高々 n_{k-1} 個の a_n しか属していなこととなり矛盾である．

[5] 実数の連続性公理（上限定理）を仮定すると，それから区間縮小法とアルキメデスの公理を証明することができるので，Bolzano-Weierstrass の定理が証明できることになる．逆に，Bolzano-Weierstrass の定理から，実数の連続性公理（上限定理）を証明することができるので，これらの主張は同値であることがわかる．

[6] 数学的帰納法で証明できる．